目　　录

第一章 引 论

§1 基本概念

关于方程，我们曾经讨论过几种类型. 如讨论过高次代数方程和线性代数方程组，其中作为未知量的是一个数和一组数；又如在数学分析中讨论过的函数方程，那里作为未知量的已是一个函数. 许多生产实际或科学技术问题中，还总结出另一类函数方程. 在这些方程中，作为未知量的也是一个函数，但与一般函数方程不同的是在这类方程中还包含了未知函数的导数或微分. 本书就是专门研究这类方程——微分方程.

通常，所谓微分方程是指这样的关系式，它联系着自变量和自变量的未知函数以及其导数（即微商）或微分. 或者说，含有未知函数的导数或微分，同时也可能包含有自变量与未知函数本身的已知关系，叫微分方程. 如

$$\frac{dx}{dt}=2t, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=\sin t, \tag{1.2}$$

$$e^y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1, \tag{1.3}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3}+\sin x\frac{d^2y}{dx^2}+5xy=0, \tag{1.4}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.6}$$

都是微分方程．在微分方程里，如果未知函数仅与一个自变量有关，叫做常微分方程．如(1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.4)都是常微分方程．如果未知函数与两个或更多个自变量有关，叫做偏微分方程．如(1.5)、(1.6)是偏微分方程．本书主要讨论常微分方程．以后若不特别说明，凡说到微分方程或者方程，均指常微分方程．

在微分方程里，未知函数的最高阶导数或微分的阶数，叫做微分方程的阶．如(1.1)是一阶的，(1.2)、(1.3)是二阶的，(1.4)是三阶的．

n阶常微分方程的一般形式可写为

$$F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0, \tag{1.7}$$

或者是显式

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}). \tag{1.8}$$

如果方程(1.7)的左端关于未知函数y以及它的各阶导数y'，y''，…，$y^{(n)}$都是一次的，则称为n阶线性微分方程；反之，称为非线性微分方程．n阶线性方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x), \tag{1.9}$$

其中函数$a_0(x)$，$a_1(x)$，…，$a_n(x)$和$g(x)$都是已知的实值连续函数．如方程(1.1)、(1.2)、(1.4)都是线性的；而方程(1.3)是非线性的．

如果在区间$I=(a,\ b)$内，存在函数$y=\varphi(x)$，且用$\varphi(x)$，$\varphi'(x)$，…，$\varphi^{(n)}(x)$分别代表y，y'，…$y^{(n)}$后，使得方程(1.7)或(1.8)在I内成为关于自变量x的恒等式，

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

或

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

则称函数$y=\varphi(x)$是方程(1.7)或(1.8)在I内的解。

通常把求一个方程的解，也常说成积分这个方程。

应该指出，以后我们讨论的函数均是实的单值函数，解$y=\varphi(x)$的n阶导数$\varphi^{(n)}(x)$不仅存在而且连续。为了方便，当函数$\varphi(x)$在I内具有直到n阶连续微商时，常简记为$\varphi(x)\in C^n(I)$，或者$\varphi\in C^n$。$\varphi\in C$表示$\varphi(x)$在I内连续。

现在，我们用积分法来讨论一个简单的微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1.10}$$

设$f\in C$。数学分析告诉我们，只需把(1.10)的两端关于自变量x积分，便得到

$$y(x)=\int f(x)dx+c. \tag{1.11}$$

其中不定积分表示$f(x)$的一个原函数，c是任意常数。当给c以不同的值时，便得到(1.10)的不同的解。

如果我们所要求的是当$x=x_0$时，$y(x_0)=y_0$ $(x_0\in I)$的解，则有

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)dt, \qquad x\in I \tag{1.12}$$

这个简单的例子表明，一个微分方程的解的个数一般是无穷多的。因此，要确定某个特定的解，一般是需要附加条件的。例如，解(1.12)就是从(1.11)中由附加条件$y(x_0)=y_0$确定的。

在理论上，特别是在应用上，往往是要求出满足某些伴随条件的解。我们把这些伴随条件叫做定解条件；把既满足微分方程

又适合定解条件的求解问题，叫做定解问题。本书讨论的主要定解问题是始值问题或称哥西（Cauchy）问题。

对于一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1.13}$$

这里$f(x,\ y)$是$(x,\ y)$平面上区域D内有定义的实值函数。方程(1.13)的始值问题就是：对D内任一点$(x_0,\ y_0)$，(1.13)具有在$I\subset D$内有定义的解$y(x)=\varphi(x)$，$(x_0\in I)$，并且满足条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{1.14}$$

数x_0、y_0叫做初始数据，而条件(1.14)叫做解$y=\varphi(x)$的初始条件。这个定解问题常简记为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,\ y), & (1.13)\\ y(x_0)=y_0. & (1.14)\end{cases}$$

例1 根据实验知道，放射性元素镭等会不断地放出射线而逐渐减少其质量（这种现象叫做衰变），其衰变的速率与元素剩余的质量成正比。如果已知剩余物在时间t_0的质量为x_0，试求出它在任何时刻t的质量。

解 从题意可知，有始值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax, \qquad (a<0) & (1.15)\\ x(t_0)=x_0, & (1.16)\end{cases}$$

其中$x(t)$记为元素的质量，$\dfrac{dx}{dt}$表示衰变的速率，$a<0$是比例常数。(1.15)表示当时间增加时元素的质量总是减少的，而条件(1.16)是初始条件。

对于(1.15)两端，可直接关于自变量t进行积分，有

$$\int\frac{dx}{x}=\int adt+\ln c,$$

所以

$$x=ce^{at},$$

其中c为任意常数。容易验证，对任意常数c，$x=ce^{at}$均是(1.15)的解。要使解还满足条件$x(t_0)=x_0$，就必须选取适当的c值。若令$x(t_0)=ce^{at_0}$，则有$c=x(t_0)e^{-at_0}$。将这个c值代入$x=ce^{at}$，就得到所求始值问题的解为

$$x=x_0e^{a(t-t_0)}.$$

我们称$x=ce^{at}$为方程(1.15)的通解，称$x=x_0e^{a(t-t_0)}$为始值问题(1.15)、(1.16)的解，或称特解。

下面关于一阶方程$y'=f(x,\ y)$，给出通解的概念。这里对$f(x,\ y)$的假定同前面一样。

我们把方程(1.13)的包含任意常数的解族：

$$y=\varphi(x,\ c) \tag{1.17}$$

叫做该方程的通解；如果解族(1.17)的表示形式是隐式：

$$\Phi(x,\ y,\ c)=0, \tag{1.18}$$

则称(1.18)为该方程的通积分。

不难看出，由(1.13)、(1.14)组成始值问题的解，可以从(1.17)或(1.18)中适当选取任意常数c的值而得到。事实上，因为c是任意常数，即$\frac{\partial\varphi}{\partial c}\neq 0$或$\frac{\partial\Phi}{\partial c}\neq 0$，故可从(1.17)或(1.18)中将$c$解出，得

$$c=\psi(x,\ y) \tag{1.19}$$

把初始数据x_0、y_0代入(1.19)即有$c_0=\psi(x_0,\ y_0)$。于是始值问题(1.13)、(1.14)的解为

$$y=\varphi(x,\ c_0),$$

或者

$$y=\varphi(x,\ x_0,\ y_0).$$

由此可以看出，微分方程$y'=f(x,\ y)$的通解含有一个任意常数，而且在一定范围内，对于任意给定的初始条件，总能找到任意常数的确定值，使得对应的解满足所给的初始条件，我们称它为特解。

关于n阶方程的始值问题、通解等概念，可以类似地定义。如，包含n个独立的任意常数的解族$y=\varphi(x,\ c_1,\ c_2\cdots c_n)$*，叫做$n$阶方程(1.8)的通解。有趣的是，任意常数的个数与对应微分方程的阶数恰好相等。

例2　求在地心引力作用下，质点m沿着铅垂直线的运动规律。

解　我们将原点放在地面上，取点m沿着运动的那一条直线为oy轴，并且规定向上的方向为正向。要想知道运动开始t秒后点m的位置，就必须求得这个点的坐标y与时间t的函数关系式，依题意可得始值问题，

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g, & (1.20)\\ y(0)=y_0, & \\ y'(0)=v_0, & (1.21)\end{cases}$$

其中y是未知函数，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$表示加速度，方程(1.20)中右端的负号

---

* 关于n个独立的任意常数的确切含意是指雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D(\varphi,\ \varphi',\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)})}{D(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)}\neq 0.$$

表明重力加速度g的方向与y轴方向相反，而初始条件$y(0)=y_0$，$y'(0)=v_0$表示初始位置和初始速度。

用积分学的方法很容易得到：

$$\frac{dy}{dt}=-gt+c_1, \tag{1.22}$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2, \tag{1.23}$$

其中c_1，c_2是任意常数；从而(1.23)就是(1.20)的通解。将初始条件代入(1.22)、(1.23)得到

$$c_1=y'(0)=v_0,$$

$$c_2=y(0)=y_0.$$

于是得到由(1.20)、(1.21)组成的始值问题的解为

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0.$$

同样地，可以给出微分方程组的有关概念。

§2 几何意义

我们知道，关于n次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

的根的存在定理是十分重要的；同样，对微分方程的始值问题，解的存在唯一性定理也是十分重要的。这里我们仅对一阶方程叙述如下，证明将在第四章里给出。

定理1.1 对于方程

$$y'=f(x,y), \tag{2.1}$$

设函数$f(x, y)$在(x, y)平面上的区域D内有定义，并且$f(x, y)$，$\frac{\partial f}{\partial y}$在$D$内连续，则方程(2.1)在$x_0\in I\subset D$的邻域内存在满足初

始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{2.2}$$

的唯一解。

对方程(2.1)的解$y=\varphi(x)$，我们把它在平面区域D内所确定的曲线，称为方程(2.1)的积分曲线。定理1.1说明，通过D内任意一点(x_0,y_0)有且仅有方程(2.1)的一条积分曲线通过。

例1 验证始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax, \quad (a<0) & (2.3)\\ x(t_0)=x_0 & (2.4)\end{cases}$$

存在唯一解。

解 由于$f(t,x)=ax$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=a$均在$(t,x)$全平面上连续，根据定理1.1，对$(t,x)$平面内任一点$(t_0,x_0)$都有唯一的一条积分曲线通过。或者说由(2.3)，(2.4)组成的始值问题存在唯一解。我们已求出这个解为$x(t)=x_0e^{a(t-t_0)}$(见§1例1)。

下面进一步来解释方程$y'=f(x,y)$的几何意义。我们知道，$\dfrac{dy}{dx}$表示积分曲线的切线斜率，于是在函数$f(x,y)$的定义域内，就有由方程(2.1)所确定的一个方向场(图1—1)。这样一来，方程(2.1)的求解问题，就可归结为寻求这样的曲线，它在每一点处的切线方向与方程(2.1)所确定的方向场的方向重合。

例2 讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{2.5}$$

的方向场和积分曲线。

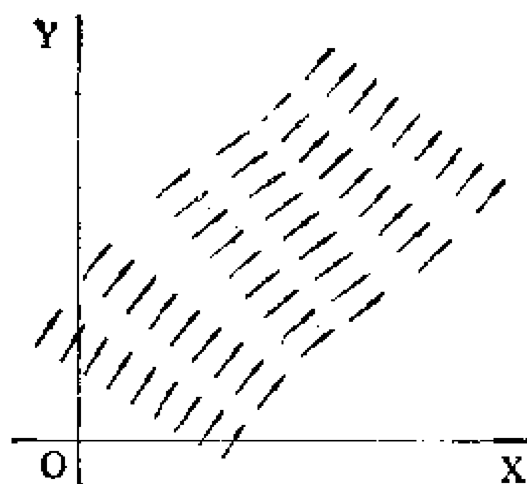


图1—1

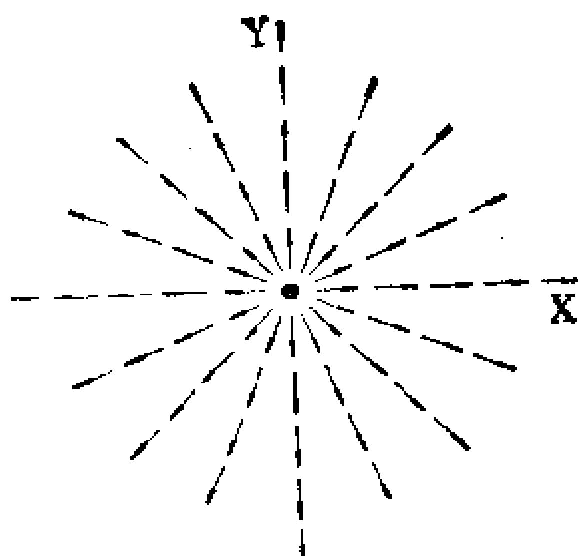


图1—2

解 在(x,y)平面上，除原点外，方程(2.5)都规定了方向场，如图1—2所示。容易看出，对任意常数k，直线族$y=kx$是方程(2.5)的积分曲线，只要让$\frac{dy}{dx}$取值无穷，或者考察方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$，可知OY轴也是积分曲线。

由于方程(2.5)在原点(0,0)处不能规定方向，因此，它的积分曲线应是不包含原点的直线族$y=kx$，或者更确切地说是从原点出发的半射线。

例3 讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2} \tag{2.6}$$

的积分曲线的分布情况。

解 因为方程(2.6)中，$f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$只在$|y|\leqslant 1$时有定义，而$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$只在$|y|<1$时有定义且连续，在$|y|=1$时没有意义。于是在直线$|y|=1$上的点处，定理1.1的条件不满足，从而唯一性可能不成立。用积分法容易求得(2.6)的通解为

$$\arcsin y = x + c,$$

或者

$$y=\sin(x+c), \tag{2.7}$$

其中c是任意常数。由于反正弦函数的主值定义区间为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，因此对固定的$c$，(2.7)中的$x$应在区间$\left[-\frac{\pi}{2}-c,\frac{\pi}{2}-c\right]$上取值。

通过直接验证可知$y=1$与$y=-1$也是方程(2.6)的解。但是，这两个解却不能从(2.7)中通过取c的值来得到，即不包括在通解(2.7)之中。从图1—3可以看出，经过$y=1$和$y=-1$上的每一点都有两条解的曲线通过，即方程(2.6)满足条件$y(x_0)=1$或$y(x_0)=-1$的解有两个；从而始值问题的解不是唯一的。这与不满足定理1.1的条件是密切相关的。

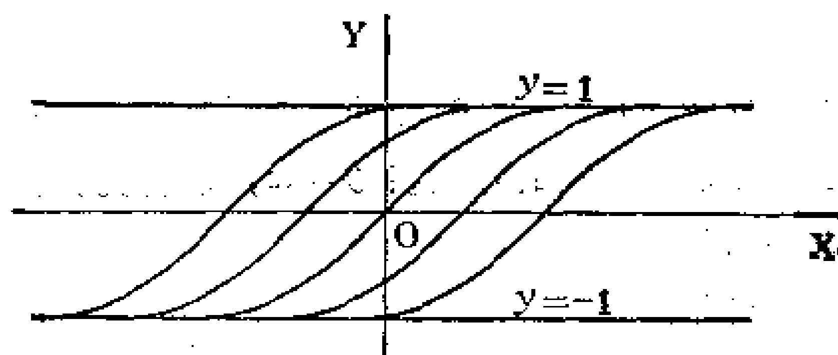


图1—3

我们称$y=1$和$y=-1$为方程(2.6)的奇解。一般说来，如果对于解$y=\varphi(x)$所表示的积分曲线上的每一点$(x,\varphi(x))$，与方程(2.1)组成的始值问题都有不止一个解，则称解$y=\varphi(x)$为方程(2.1)的奇解。换句话说，在奇解所表示的曲线上，每一点处的唯一性都不成立。至于在什么条件下方程才具有奇解，以及如何求方程的解，这是后面有关章节将要讨论的内容。

§ 3　常微分方程中讨论的基本问题

常微分方程的产生和发展，如同微积分一样与社会上生产技术的需要密切相关。十七世纪叶，由于机器使用于生产，引起了技术的迅速发展，从而推动了自然科学，特别是力学的发展，这样就对研究其规律的数学工具提出了需求，使得能够利用数学，不仅精确地表明状态，并且也可描述其运动过程。微分方程就是在这样的历史条件下与微积分差不多同时产生的。微分方程的运用比较好地解决了当时自然科学与工程技术中所提出的一些问题，推动了其它科学技术的发展，与此同时，也推动了它自身的发展，使之成为数学的一个重要分支。

常微分方程讨论的基本问题是：研究方程的求解问题和解的各种属性。

人们经过长期的努力，对微分方程中一些特殊的方程建立了所谓初等积分法。而且对线性方程和线性方程组的理论也发展得比较完善；特别是巧妙地利用代数知识得出了一些求解方法。一般说来，对于一个微分方程或方程组，如果能求出它的通解表达式，这对我们选取所需要的特解以及关于解的其它性质的研究都要方便得多。但是，能够用初等积分法求解的微分方程却为数不多。甚至象黎卡提(Riccati)方程：

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$$

这样的一阶方程，要想利用初等积分法求解，也已经证明是不可能的。为了满足实际问题的需要，就转到寻求方程的数值解；并且，还依据方程本身的结构去探索解的各种属性。这样不仅有助于实际问题的解决，而且也促进了微分方程这个有力工具的进一

步发展。

一般说来，微分方程的解的存在性、唯一性、对始值的连续依赖性、可微性等问题都是很重要的，也是最基本的。我们知道，在多数情况下，只能求得方程的数值解，然而解的存在性和唯一性就是我们求数值解的前提条件，因为作数值计算至少要在解存在的基础上才能进行。譬如，如果给定的微分方程的解根本不存在，或者存在而不唯一，这就启示我们对所考察的实际问题应当作更深入的认识和分析，因为只有正确反映实际的微分方程和定解条件的解不仅存在而且是唯一的。更何况人们在建立微分方程与测定定解条件的过程中，总要略去若干物理因素而加以理想化，同时还会存在着某些偶然因素，这就难免有失真的可能。由此可见，研究解的存在性、唯一性并非无关紧要。还有像解对初始值和参数的连续依赖性问题，可微性问题等，正如已经指出的，不管方程本身还是定解条件，都是理想化了的，即所描述的现象都只能是近似的，因此当方程本身或定解条件有了变化时，对应的解一般也跟着变化，二者之间的关系怎样？这就需要认真进行研究。如果方程本身或定解条件变化很小，而对应的解的变化却非常之大，那么这样的解的实际意义就要进一步考虑了，它可能就失去了实用价值。

当然，这里所提到的问题，仅仅是常微分方程教程里所要涉及的课题。而常微分方程理论所讨论的内容远远不止这些。

常微分方程这门学科，从产生到现在已近四个世纪，业已发展成为一门内容十分丰富的学科，成为研究自然科学和技术科学的强有力的工具，并且继续不断地发展着。本教程所要介绍的内容，正是学习和掌握这门科学的起步。

习 题

1．指出下列微分方程的阶，并说明哪些方程是线性的：

(1) $(x^2+2y^2)dx+(3x^2-4y^2)dy=0$；

(2) $xyy'=(y'')^3$；

(3) $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+x=f(t)$ ；

(4) $\frac{dx}{dy}=x^2+y^2$；

(5) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-y=e^x$。

2． 试验证下列函数分别是所给微分方程的解：

(1) $x(t)=e^{2t}$ ， $x'''-4x'=0$；

(2) $y(x)=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{c-x^3}$， $y'=y^2-\frac{2}{x^2}$；

(3) $y(x)=ce^{-\int p(x)dx}$ ， $y'+p(x)y=0$；

(4) $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ ， $y''+y=0$。

3． 求下列曲线族所满足的微分方程：

(1) $y=ce^{-kx}$ ；

(2) $y=\sin(x+c)$；

(3) $t^2-x^2=cx$ ；

(4) $(t-c_1)^2+(x-c_2)^2=c^3$。

4． 设空气的温度等于20℃，一物体在20分钟内由100℃冷至60℃，试问在多长时间内，这个物体的温度降到30℃？

5． 给出描述下面物理现象的微分方程及初始条件：设有质量为 m 的质点，以初速度 v_0 被铅直向上抛出，假设空气的阻力与速度成正比。

6． 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横座标，求这条曲线所适合的微分方程。

7. 作出下列方程的方向场，并描出经过指定点的积分曲线草图：

(1) $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$，(0,0)，$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$；

(2) $\frac{dx}{dt}=|x|$，(0,0)，(0,−1)；

(3) $\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$，(0,0)，(0,1)；

(4) $\frac{dy}{dx}=xy+1$，(−1,1)，$\left(\frac{1}{2},0\right)$。

第二章　一阶微分方程

§1　可分离变量方程

这一章，主要介绍某些特殊类型的一阶方程的初等积分法。为了不使内容过于繁杂，又能适应基础课程的要求，本书仅介绍一些常用的典型方法；自然，所介绍的初等积分法远非完整，只能说是最基本的。并且，一般只叙述了求解方法。

形如

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \tag{1.1}$$

的微分方程，称为可分离变量方程。这种方程的特点是其右端为只含 x 的函数与只含 y 的函数的乘积。

设函数 $f_1(x)\in C(a,b)$，$f_2(y)\in C(c,d)$，且 $f_2(y)$ 恒不等于零，将(1.1)式两端分别乘以 dx，并除以 $f_2(y)$，于是变量被分离。就得到

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx \tag{1.2}$$

如果 y 作为 x 的函数是方程(1.1)的解，根据数学分析中一阶微分的形式不变性可知，当 y 看作自变量时，有

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=F_2(y)+c,$$

其中 $F_2(y)$ 是 $\frac{1}{f_2(y)}$ 的原函数。当 y 是 x 的可微函数时，上面等

式依然成立。所以从(1.2)式有

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c, \tag{1.3}$$

其中 c 是任意常数。

现在考察在所设条件下，公式(1.3)能否将 y 确定为 x 的单值函数。用 $F_1(x)$ 表示 $f_1(x)$ 的任一原函数，则(1.3)式可改写为：

$$F_2(y) = F_1(x) + c. \tag{1.4}$$

因为

$$F_2'(y) = \frac{1}{f_2(y)} \neq 0 ,$$

故由(1.4)式可就 y 解出：

$$y = F_2^{-1}(F_1(x) + c) \tag{1.5}$$

此处 F_2^{-1} 是 F_2 的反函数。于是函数(1.5)是方程(1.1)的通解。

为了求得满足条件 $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \in (a,b),\ y_0 \in (c,d))$的解，可以从

$$y_0 = F_2^{-1}(F_1(x_0) + c)$$

确定出常数 c：

$$c = F_2(y_0) - F_1(x_0)$$

然后代入(1.5)便得所求特解：

$$y = F_2^{-1}(F_1(x) + F_2(y_0) - F_1(x_0)) \tag{1.6}$$

表达式(1.3)或(1.4)通常叫做方程(1.1)的隐式通解。

例 1 求解 $x(y^2-1) + y(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

解 对方程进行分离变量

$$\frac{x}{x^2-1}dx = \frac{-y}{y^2-1}dy,$$

积分可得

$$\ln|x^2-1| = -\ln|y^2-1| + \ln|c|$$

或

$$(x^2-1)(y^2-1)=c.$$

例 2 求解 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x^2}\ln y \quad (y>0)$。

解 对方程进行分离变量

$$e^{x^2}dx=\frac{dy}{\ln y} \quad (\ln y \neq 0),$$

积分得

$$\int e^{x^2}dx=\int\frac{dy}{\ln y}+c,$$

显然，解$y=1$不包含在这个通解中。虽然我们知道积分$\int e^{x^2}dx$和$\int\frac{dy}{\ln y}$都不是初等函数，但是，原方程可以认为已经积分了，因为剩下的只是求积的问题。

例 3 求解始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}, & (x^2<1,\ y^2\leqslant 1); \\ y(0)=1. & \end{cases}$$

解 对方程先分离变量

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (y\neq\pm 1)$$

两端积分便得到隐式通解

$$\sin^{-1}y=\sin^{-1}x+c,$$

于是有

$$y=\sin(\sin^{-1}x+c)$$
$$=x\cos c+\sin c\cdot\cos(\sin^{-1}x)$$
$$=x\cos c+\sin c\cdot\sqrt{1-x^2}$$
$$=x\sqrt{1-c_1^{\ 2}}+c_1\sqrt{1-x^2},$$

这里$c_1=\sin c$，容易看出$y=\pm1$也是方程的解，但它不包含在这个通解之中。再由初始条件$y(0)=1$确定出任意常数c_1，得

$$c_1=1,$$

代入通解便得所求问题的解为

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

例 4 冷却问题：把一块温度为840℃的45#钢块，放在水温为10℃的水池里淬火，试讨论钢块温度的变化规律。

解 在淬火过程中，钢块的温度随时间 t 发生变化，是时间 t 的函数，记为 $\theta(t)$。要直接从上述条件去确定未知函数 $\theta(t)$是困难的，但是找出 $\theta(t)$ 和其导数之间的关系却比较容易，即不难建立 $\theta(t)$ 所适合的微分方程。

根据实验测定，温度为 θ 的物质，在温度为 $\theta_0(\theta_0<\theta)$的环境中，温度冷却速度与温差 $\theta-\theta_0$ 成正比，即

$$\frac{d\theta}{dt}=k(\theta-\theta_0),$$

其中 k 是比例常数。

因为 $\theta(t)$ 随时间 t 增加而减少，所以$\frac{d\theta}{dt}<0$；而$\theta-\theta_0>0$，这表明比例常数 k 应为负数，在实际中总是表成$k=-a(a>0)$。现 $\theta_0=10$℃，因此 $\theta(t)$所适合的微分方程是

$$\frac{d\theta}{dt}=-a(\theta-10)$$

将它进行分离变量，并积分

$$\int -a dt = \int \frac{d\theta}{\theta - 10} + c_1,$$

于是得到

$$\theta(t) = 10 + ce^{-at},$$

其中 c 是任意常数。

为了找出问题的解，注意到初始条件

$$\theta(0) = 840,$$

据此定出

$$c = 830.$$

于是得到问题的解为

$$\theta(t) = 10 + 830e^{-at}.$$

例5 要作一个高为H的支柱，使其中心线为对称轴，并要求它在每一个高度的横截面上所受的压强与顶部所受的压强相同；设顶部的面积为 S_0，上面的载荷为 P，所用材料的比重为 r，试考虑支柱的形状。

解 取支柱的中心线为h轴，方向向下，原点取在顶部的中心。记截面的面积为S，于是讨论的问题就是求未知函数$S(h)$。现在我们先推导出函数$S(h)$所适合的微分方程和定解条件，然后通过求此定解问题的解即可得到函数$S(h)$。

截面$S(h)$上的负荷，除了P以外，还有支柱自身位于截面以上部分的重量Q。由于这部分支柱的体积为

$$V = \int_0^h S(\tau) d\tau$$

于是

$$Q = r\int_0^h S(\tau) d\tau$$

已知支柱顶端的压强是$\frac{P}{S_0}$，而截面$S(h)$上的压强可写为$\frac{P+Q}{S(h)}$，根据假设压强与高度无关，所以等式

$$\frac{P}{S_0}=\frac{P+Q}{S(h)}$$

成立，即

$$\frac{P}{S_0}S(h)=P+r\int_0^h S(\tau)d\tau$$

对上式两端就h求导，即得微分方程

$$\frac{P}{S_0}\frac{dS}{dh}=rS(h).$$

再考虑到初始条件

$$S(0)=S_0,$$

于是不难求得截面面积的变化规律函数是

$$S(h)=S_0e^{\frac{rS_0h}{P}}.$$

我们把可分离变量方程的求解方法叫做分离变量法。分离变量法是解一阶方程的基础方法，对于一个微分方程能否用分离变量法求解，关键在于寻找把它转化为可分离变量方程的途径。下面我们通过几个例子来说明，尽管一些方程本身不是可分离变量的，但通过适当变换后，便可化为形如(1.1)或(1.2)的可分离变量方程。

例6 求解 $\frac{dy}{dx}=2x+y$.

解 作变换，令

$$z=2x+y,$$

则

$$\frac{dz}{dx}=2+\frac{dy}{dx}.$$

代入原方程得

$$\frac{dz}{dx}=2+z,$$

将它分离变量

$$\frac{dz}{2+z}=dx,$$

积分得

$$\ln|z+2|=x+\ln|c|,$$

或

$$z=ce^{x}-2,$$

所以得到原方程的解为

$$y=ce^{x}-2x-2.$$

例7 求解 $\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}^{2}(x+y)$.

解 作变换

$$z=x+y,$$

则

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx},$$

代入原方程，化简后得

$$dx=\cos^{2}z\,dz,$$

积分便得

$$x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}\sin 2z+c_{1}.$$

于是原方程的隐式解为

$$2(x-y)-\sin 2(x+y)=c \qquad (c=4c_1).$$

例8 求解 $x^2\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)+y\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0.$

解 改写原方程为

$$x^2(xdx+ydy)+y(xdy-ydx)=0,$$

并注意到

$$xdx+ydy=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)$$

及

$$xdy-ydx=x^2d\left(\frac{y}{x}\right),$$

因而作变换

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta$$

$\left(\text{或 } x^2+y^2=\rho^2,\ \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}\right)$. 此时

$$dx=-\rho\sin\theta d\theta+\cos\theta d\rho,$$

$$dy=\rho\cos\theta d\theta+\sin\theta d\rho,$$

于是原方程化为

$$d\rho+\operatorname{tg}\theta\sec\theta d\theta=0.$$

积分得到

$$\rho+\sec\theta=c_1.$$

于是原方程的隐式解为

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=c_1,$$

即

$$(x^2+y^2)\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=c \qquad (c=c_1^2).$$

§2 齐次方程

关于一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y) \tag{2.1}$$

的右端函数$\varphi(x,y)$，如果是它的变量的零次齐次函数，即满足恒等式

$$\varphi(tx,ty)=\varphi(x,y), \tag{2.2}$$

那么方程(2.1)叫做齐次方程．此时，取$t=\frac{1}{x}$，则从(2.2)有恒等式

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(1,\ \frac{y}{x}\right).$$

上式右端是变量$\frac{y}{x}$的函数，记为$f\left(\frac{y}{x}\right)$．因此，齐次方程恒可写成

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.3}$$

对于任意的连续函数f，方程(2.3)都可通过变换

$$y=x\cdot z \tag{2.4}$$

将其化为可分离变量方程．把(2.4)对x微分，有

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z.$$

代入(2.3)得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{f(z)-z}{x}. \tag{2.5}$$

方程(2.5)是可分离变量方程．当$f(z)-z\neq0$时，进行分离变

量，积分后得

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|x|-\ln|c|,$$

或

$$x=ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}. \tag{2.6}$$

再将$\frac{y}{x}$替换上式的z，即得方程(2.3) 的通解。

若$f(z)-z\equiv 0$，即$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$，这时方程(2.3) 已经是可分离变量的方程了．若当$z=z_0$时，$f(z)-z$才为零，则可直接看出$z=z_0$是方程(2.5) 的解，从而$y=z_0x$是方程(2.3) 的解。显然它不包含在通解(2.6) 中。

例1 求解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\frac{x}{y}$.

解 作变换 $y=xz$，则方程变为

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}.$$

将它分离变量

$$2zdz=\frac{dx}{x},$$

两端积分得

$$z^2=\ln|x|+c,$$

再将 $z=\frac{y}{x}$代入，便得到通解为

$$y^2=x^2(\ln|x|+c).$$

例2 求解 $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$.

解 作变换 $y=xz$，则方程化为

$$(1-2z^3)dx-3z^2xdz=0,$$

进行分离变量并积分得

$$2\ln x+\ln(1-2z^3)=\ln|c|,$$

或

$$x^2(1-2z^3)=c.$$

再将 $z=\dfrac{y}{x}$代入，便得

$$x^2\left[1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]=c \quad 或 \quad x^3-2y^3=cx.$$

例3 在制造探照灯的反射镜面时，要求把由一个点光源射出的光线，能够平行地反射出去。试求反射镜面应具有的几何形状。

解 设所求曲面是由曲线 $y=f(x)$ 旋转而成。取旋转轴为 x 轴，轴的方向平行于光的反射方向，使光源位于坐标原点，如图2—1，过曲线$y=f(x)$上任一点$M(x,y)$，作切线MN，它与OX轴的交角记为α，根据光的性质：入射角等于反射角，即$\alpha=\gamma$。记OM与X轴的交角为β，则

$$\beta=2\alpha.$$

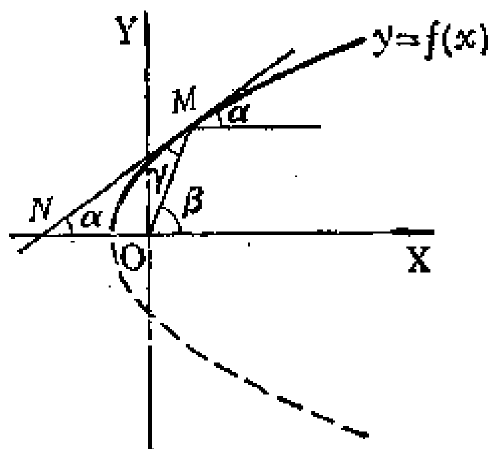


图2—1

因为 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{dy}{dx}$， $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{y}{x}$，于是对上式两端取正切得

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

将 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{dy}{dx}$， $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{y}{x}$代入上式，得方程

$$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,$$

解出$\frac{dy}{dx}$，有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

(这里，依题意只要考察根号前取正号的情形)，作变换

$$y=xz,$$

于是方程化为

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{1+z^2}-z^2-1}{z},$$

分离变量后积分

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{1+z^2}-z^2-1}=\ln|x|-\ln|c|,$$

令 $1+z^2=u^2$，有

$$\int\frac{du}{1-u}=\ln|x|-\ln|c|,$$

$$\frac{1}{u-1}=\frac{x}{c}.$$

把 $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$代入上式，便得

$$y^2=2cx+c^2,$$

其中 c 为任意常数，它是一族抛物线。

因此，我们的镜面应是旋转抛物面的形状，它的曲面方程，在空间(x,y,z)中应表为

$$y^2+z^2=2cx+c^2.$$

形如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2.7}$$

的方程，可化为齐次方程，其中a_i，b_i，c_i（$i=1,2$）都是常数。

当$c_1=c_2=0$时，则(2.7)就是齐次方程。这时方程(2.7)可写成

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

当c_1、c_2中至少有一个不为零时，分两种情况来讨论：

i）若直线$a_1x+b_1y+c_1=0$和$a_2x+b_2y+c_2=0$相交，设交点为(x_1,y_1)，则平移坐标原点于交点，就变方程(2.7)为齐次方程，因为在新坐标$\xi=x-x_1$，$\eta=y-y_1$下，两条直线中的自由项都变为零，且$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$，于是方程(2.7)就变为

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right), \tag{2.8}$$

(2.8)式已是上面讨论过的齐次方程。

ii）若两直线不相交，即平行，这时它们的对应系数成比例：

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda,$$

此时，方程(2.7)可写成

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y). \tag{2.9}$$

只要作变换$z=a_1x+b_1y$就把它化为可分离变量的方程。

例4 求解 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解 首先解

$$\begin{cases}x-y+1=0,\\x+y-3=0,\end{cases}$$

得到$x_1=1$，$y_1=2$。于是作变换

$$\begin{cases} x=\xi+1, \\ y=\eta+2, \end{cases}$$

将原方程化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}.$$

再作变换$\eta=\xi z$，就把它化为可分离变量方程：

$$\frac{dz}{d\xi}=\frac{1}{\xi}\frac{1-2z-z^2}{1+z}.$$

积分得

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2|=\ln|\xi|-\frac{1}{2}\ln|c|,$$

于是有

$$\xi^2-2\xi\eta-\eta^2=c,$$

所以原方程的通解为

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=c_1,$$

这里$c_1=c+7$是任意常数。

§3 线性方程

我们知道，一阶线性方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x), \tag{3.1}$$

其中$p(x)$、$f(x)\in C$。

在(3.1)中，如果$f(x)\equiv 0$，则有

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0. \tag{3.2}$$

方程(3.2) 叫做与(3.1)对应的线性齐次方程，而(3.1)叫做线性非齐次方程。

很明显，这里所说的线性齐次方程与§2中所讨论的齐次方程是完全不同的。(3.2) 也是一类可分离变量方程，因此，可用分离变量法求出它的通解为

$$y=ce^{-\int p(x)dx}, \tag{3.3}$$

其中 c 是任意常数。

线性齐次方程(3.2)恒具有零解 $y\equiv 0$(对应着 $c=0$ 的情形)，我们称它为平凡解。

为了积分线性非齐次方程 (3.1)，我们设想它的解仍具有(3.3)的形式，但其中的 c 不再是常数，而是变量 x 的函数。即求(3.1)的形如

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{3.4}$$

的解，其中 $c(x)$ 是待定函数。现把函数(3.4)代入方程(3.1)：

$$\frac{d}{dx}\left[c(x)e^{-\int p(x)dx}\right]+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x),$$

亦即

$$\frac{dc(x)}{dx}=f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

这便是待定函数 $c(x)$ 应满足的微分方程，用分离变量法求解，得到

$$c(x)=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+c_1$$

其中 c_1 是任意常数，将 $c(x)$ 代入(3.4)就得到方程(3.1)的通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[c_1+\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]. \tag{3.5}$$

这种解法，称为常数变易法。

从线性方程(3.1) 的通解表达式，可以看出它是由两部分组成，其中一项$c_1e^{-\int p(x)dx}$是齐次方程(3.2)的通解，另一项$e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$正好是非齐次方程(3.1)的一个特解(即在(3.5)中取$c_1=0$的情形)。所以，一阶线性方程的通解，等于对应的线性齐次方程的通解加上它自身的一个特解，这是线性微分方程的解在结构上的重要特征之一。因此，只要能求得线性方程(3.1)的一个特解：$y=\varphi(x)$，那么(3.1) 的通解就可写为

$$y=c_1e^{-\int p(x)dx}+\varphi(x).$$

例1 求解$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$。

解 先求出对应的齐次方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$$

的通解，得

$$y=cx,$$

应用常数变易法，将

$$y=c(x)\cdot x$$

代入非齐次方程，则有

$$\frac{dc(x)}{dx}=x,$$

积分得

$$c(x)=\frac{x^2}{2}+c_1.$$

再将上式代入$y=c(x)\cdot x$就得到原方程的通解为

$$y=c_1x+\frac{x^3}{2},$$

其中c_1是任意常数。

例2 由电感L、电阻R组成的电路，如图2—2所示，在时刻$t=0$时接通电路，由于交流电源$E=E_0\sin\omega t$，此时电路有电流i通过，求电流i与时间t的关系。

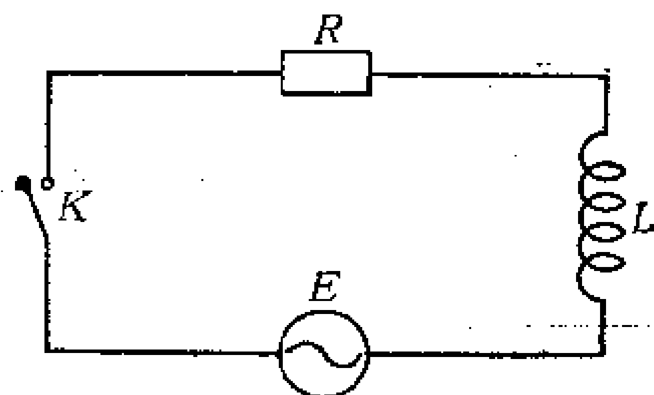


图2—2

解 根据电学中闭合电路的电压定律，不难得到电流i应满足的微分方程

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t,$$

这是一个一阶线性非齐次方程。先积分对应的齐次方程

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0,$$

得通解

$$i=ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

应用常数变易法，得

$$i=c(t)e^{-\frac{R}{L}t},$$

代入非齐次方程，得到关于$c(t)$的微分方程。

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t,$$

积分得

$$c(t)=\frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t-\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right]+c_1,$$

将上式代入$i=c(t)e^{-\frac{R}{L}t}$即得原方程的通解为

$$i=c_1e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{\omega^2L^2+R^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$$

按题意，还有初始条件：$t=0$时，$i=0$。利用此条件定出任意常数是

$$c_1=\frac{E_0\omega L}{\omega^2L^2+R^2}.$$

于是得到电流i的变化规律为

$$i=\frac{E_0\omega L}{\omega^2L^2+R^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}\sin(\omega t+\varphi),$$

其中$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$.

关于线性方程(3.1)的始值问题，即求方程(3.1)满足初始条件：

$$y(x_0)=y_0 \tag{3.6}$$

的解。这时我们将通解表达式(3.5)改写成

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\left[c+\int_{x_0}^{x}f(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau}p(S)dS}d\tau\right].$$

再利用初始条件(3.6)，求得

$$c=y(x_0)=y_0,$$

于是始值问题(3.1)、(3.6)的解，可写为

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}f(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau}p(s)ds}d\tau\right].$$

根据上面的解法，我们知道线性微分方程的始值问题的解是存在并且唯一的。

贝努里 (Bernoulli) 方程. 形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n \quad (n\neq 0,1) \tag{3.7}$$

的方程叫做贝努里方程。它是一个非线性方程。而对于非线性方程，能够提供的求解方法是很少的。但是，某些非线性方程，通过作变换，便可化为线性方程，从而能用积分求解。贝努里方程就是其一。首先把方程(3.7) 改写成

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x),$$

亦即

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x). \tag{3.8}$$

不难看出，只要施行变换$z=y^{1-n}$，方程(3.8) 就化为线性方程：

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=f(x).$$

它的通解可由公式(3.5)给出，再利用变换$y=z^{\frac{1}{1-n}}$就可得到方程(3.7)的通解。

例3 求解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$.

解 改写原方程为

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y^2+x^2,$$

作变换$z=y^2$，即可化为线性方程：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}z+x^2.$$

根据公式(3.5)得

$$z=c_1x+\frac{x^3}{2}.$$

故所求方程的通解为

$$y=\pm\sqrt{c_1x+\frac{x^3}{2}}.$$

黎卡提方程．在第一章§3里提出过黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=f(x). \tag{3.9}$$

显然，方程（3.9）也是一个非线性方程。尽管当$f(x)=0$时，它便是贝努里方程，但是它的求解问题却困难得多。我们知道，方程（3.9）的解不能用初等函数求积表出，但是如果已知它的一个特解，那么它的通解可以由两次求积得到。设$y_1(x)$是方程(3.9)的一个特解，于是作变换

$$y=y_1+z,$$

代入方程(3.9)，再利用恒等式

$$\frac{dy_1}{dx}+p(x)y_1+q(x)y_1^2=f(x),$$

我们就得到方程

$$\frac{dz}{dx}+\left[p(x)+2q(x)y_1\right]z+q(x)z^2=0.$$

这是贝努里方程，只要再作变换$u=z^{-1}$，上式即可化为线性方程，

$$-\frac{du}{dx}+\left[p(x)+2q(x)y_1\right]u+q(x)=0.$$

我们知道，线性方程的通解公式(3.5) 是用两次求积得到的．所

以对黎卡提方程，只要能求出它的一个特解，那么它的通解就可以由两次求积得到。

例4 求解 $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$。

解 由直接验证可知$y=\frac{1}{x}$是这个黎卡提方程的特解，于是作变换$y=z+\frac{1}{x}$，方程就化为贝努里方程：

$$\frac{dz}{dx}=z^2+\frac{2z}{x},$$

再令 $u=\frac{1}{z}$，便化为线性方程：

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2}{x}u-1。$$

利用公式(3.5)得

$$u=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},$$

即

$$\frac{1}{z}=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},$$

从而

$$y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{3c_1-x^3}。$$

§4 全微分方程

我们将一阶显式方程改写成对称形式，它的一般形状为

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0. \tag{4.1}$$

方程(4.1)的自变量可随意选定x或者y,这样讨论时往往会更方便些。

从数学分析中我们知道，函数$u(x,\ y)$的全微分表达式是

$$du(x,\ y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

如果方程(4.1)的左端恰好是函数$u(x,\ y)$的全微分，即

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=du(x,\ y)$$

那么不论变量x与y是独立的还是依赖的，我们总可对等式

$$du(x,\ y)=0 \tag{4.2}$$

积分，得到

$$u(x,\ y)=c. \tag{4.3}$$

换句话说，此时方程(4.1)具有隐式通解(4.3)，其中c是任意常数。

因此，如果方程(4.1)可以改写成（4.2）时，我们就把方程（4.1）叫做全微分方程。

例1 求解 $y^2dx+2xydy=0$.

解 方程的左端是函数$u(x,\ y)=xy^2$的全微分，故它的通解是

$$xy^2=c.$$

例2 求解 $y\cos xdx+\sin xdy=0$.

解 由观察法，可以看出方程的左端恰好是函数$u(x,\ y)=y\sin x$的全微分，因此，它的通解为

$$y\sin x=c.$$

从上面两个例题可以看出，对于简单方程用观察法易于求解，而比较复杂的方程，事情就不那么容易了。问题的关键是如何判

断方程(4.1) 是一个全微分方程，以及怎样去求它的解。对此，我们有下述结论：

设函数$M(x, y)$与$N(x, y)$在(x, y)平面上的开区域D内具有一阶的连续微商，且$M^2(x, y)+N^2(x, y)\neq 0$。那么，方程(4.1) 是全微分方程的充要条件是：

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4.4}$$

事实上，若方程(4.1) 是全微分方程，则存在函数$u(x, y)$，使得

$$du=M(x, y)dx+N(x, y)dy,$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N. \tag{4.5}$$

将第一式对y求偏导数，第二式对x求偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

根据对M、N的假设，推知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

所以

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

反之，条件(4.4) 成立，则可设立一个函数$u(x, y)$，使它满足关系式(4.5)。由(4.5)的第一式可得

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x}M(x, y)dx+c(y) \tag{4.6}$$

现在来适当选取任意函数$c(y)$，使得函数$u(x, y)$满足(4.5)的

第二式，因此应有

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)dx + c'(y) = N(x,\ y)$$

即

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx + c'(y) = N(x,\ y)$$

利用条件(4.4)，上式可写为

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx + c'(y) = N(x,\ y)$$

从而，有

$$c'(y) = N(x_0,\ y)$$

故

$$c(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)dy + c_1$$

其中c_1是任意常数，代入(4.6)得

$$u(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x,\ y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c_1 \quad (4.7)$$

这就是满足关系式（4.5)的函数 $u(x,\ y)$，所以方程(4.1) 是全微分方程。

从这可以看出，充分性证明的本身，就给出了求函数 $u(x,\ y)$的步骤。显然，求函数 $u(x,\ y)$时，也可以从（4.5）的第二式出发，类似地推出：

$$u(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x,\ y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy + c_1 \quad (4.8)$$

例3 求解$(2xy^2+x+2)dx+(2x^2y-y^2+3)dy=0$。

解 因为

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以是一个全微分方程，由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^2+x+2$$

对x积分，得

$$u=x^2y^2+\frac{x^2}{2}+2x+c(y),$$

其中$c(y)$是待定函数，让

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y+c'(y)=2x^2y-y^2+3,$$

求得

$$c(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+c_1,$$

故

$$u=x^2y^2+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{y^3}{3}+3y+c_1,$$

于是方程的通解为

$$3x^2+6x^2y^2+12x-2y^3+18y=c_2.$$

我们已经讨论了全微分方程的求解问题，现在进一步研究，如果方程

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0 \tag{4.1}$$

不是全微分方程，即条件(4.4)不成立，那么怎样将方程(4.1)化成全微分方程。为此，我们要找一个函数$\mu(x,\ y)(\neq 0)$，当方程(4.1)乘以$\mu(x,\ y)$后，便得到一个全微分方程：

$$\mu Mdx+\mu Ndy=0, \tag{4.9}$$

即满足充要条件

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{4.10}$$

这时，我们把函数$\mu(x, y)$叫做方程(4.1) 的积分因子。

但是这样的积分因子是否存在？为了回答这个问题，现考虑条件(4.10)，它可看成$\mu(x, y)$为积分因子的充要条件，展开条件(4.10)就是

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right), \qquad (4.11)$$

或者两端除以μ，变为

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}.$$

这是一个以μ为未知函数的一阶线性偏微分方程．求解这个偏微分方程，一般并不比求解方程(4.1) 简单(参见第八章)．可是我们这里需要的仅是偏微分方程(4.11)的任何一个特解，因此，它仍提供了求出特殊形式的积分因子的途径。

例如，考虑仅与x有关的积分因子$\mu(x)$，此时$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$，(4.11) 就化为

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N$，而与$y$无关。它是方程(4.1)有只依赖于$x$的积分因子的充要条件，于是

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$$

就是方程(4.1) 的一个积分因子。

例4 求解 $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$。

解 这里$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=y$，因此原方程不是全微分方程，

由于$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=\frac{1}{x}$，于是原方程有积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x.$$

现考察方程

$$x(x^2+y^2+x)dx+x^2ydy=0,$$

把它改写为

$$x^3dx+x^2dx+(xy^2dx+x^2ydy)=0,$$

并注意到 $xy^2dx+x^2ydy=\frac{1}{2}d(x^2y^2)$，即可得原方程的隐式通解为

$$3x^4+4x^3+6x^2y^2=c.$$

利用积分因子，也可求解一阶线性方程，下面我们来看几个例子。

例5 求解 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$.

解 改写原方程成对称形式

$$[p(x)y-f(x)]dx+dy=0,$$

这里$\frac{\partial M}{\partial y}=p(x)$，$\frac{\partial N}{\partial x}=0$. 由于$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=p(x)$，因此方程有积分因子

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}.$$

考察方程

$$e^{\int p(x)dx}[p(x)y-f(x)]dx+e^{\int p(x)dx}dy=0,$$

将它改写成

$$d[ye^{\int p(x)dx}]-f(x)e^{\int p(x)dx}dx=0,$$

积分得通解

$$ye^{\int p(x)dx}-\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx=c,$$

或

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[c+\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right].$$

这正是§3所求得的通解公式(3.5)。

同样地，可以得到只与y有关的积分因子$\mu(y)$，此时$\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$，(4.11)化为

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\psi(y),\qquad \psi(y)=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M.$$

这时方程(4.1)具有积分因子$\mu(y)=e^{\int\psi(y)dy}$.

例6 试求方程

$$(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$$

的积分因子。

解 这里$\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1$，$\frac{\partial N}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3$，由于$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M=-\frac{4}{y}$，故原方程有仅与$y$有关的积分因子，它应是

$$\mu(y)=e^{-4\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y^4}.$$

如上所述，寻求方程(4.1)的积分因子，利用了偏微分方程(4.11)，可是(4.11)可以有无穷多个特解，所以方程(4.1)便具有无穷多个积分因子，譬如，设μ是方程(4.1)的一个积分因子，于是有$du=\mu Mdx+\mu Ndy$，对于u的任一连续函数$f(u)$，由于

$$\mu f(u)(Mdx+Ndy)=f(u)(\mu Mdx+\mu Ndy)$$
$$=f(u)du=dF(u),$$

其中$F(u)$是$f(u)$的一个原函数，可见$\mu f(u)$也是方程(4.1)的积分因子。

例如，关于方程 $ydx-xdy=0$，显然它不是全微分方程。但

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{ydx-xdy}{x^2},$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy},$$

$$d\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

$$d\left(\ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}.$$

所以$\frac{1}{x^2}$，$\frac{1}{y^2}$，$\frac{1}{xy}$，$\frac{1}{x^2+y^2}$，$\frac{1}{x^2-y^2}$等都是此方程的积分因子。

最后应指出，积分因子这个工具，从理论上讲，它提供了求积方程(4.1)的一般方法；但是，对于一个具体的方程如何找出所要的积分因子，一般说来却并不容易。除了对几种特殊的积分因子有具体求法外，通常我们是利用观察法。

例7 求解 $xdx+ydy+(x^2+y^2)x^2dx=0$。

解 不难看出，方程有积分因子$\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$，将方程两边乘以μ之后，得到

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+x^2dx=0,$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{x^3}{3}=\ln c, \quad (c>0).$$

所以隐式通解为

$$(x^2+y^2)e^{\frac{2}{3}x^3}=c.$$

例8 试求方程 $\left(\frac{y}{x}+3x^2\right)dx+\left(1+\frac{x^3}{y}\right)dy=0$ 的积分因子.

解 改写方程为

$$\left(\frac{y}{x}dx+dy\right)+\left(3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy\right)=0$$

不难看出，方程左端第一部分有积分因子$\mu_1=x$,第二部分有积分因子$\mu_2=y$，且

$$d(xy)=\mu_1\left(\frac{y}{x}dx+dy\right), \qquad u_1=xy;$$

$$d(x^3y)=\mu_2\left(3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy\right), \qquad u_2=x^3y.$$

为了找出原方程的积分因子，令

$$x\varphi(xy)=y\psi(x^3y),$$

选取使上式成立的函数φ，ψ：

$$\varphi(u_1)=u_1^2=x^2y^2, \quad \psi(u_2)=u_2=x^3y.$$

于是

$$\mu=\mu_1\varphi(u_1)=\mu_2\psi(u_2)=x^3y^2$$

就是所求的积分因子.

§5 隐式方程

考察形如

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{5.1}$$

的一阶隐式方程．这里只着重研究它的某些特殊类型的求解．

大家知道，对于一阶显式方程，常常求得的都是所谓隐式解，那么对隐式方程来说，能求得显式解的情形就更少了。因此，在讨论隐式方程(5.1) 时，我们经常去求它的隐式解或者利用引入参数的办法去求所谓参数形式解．

一种比较简单的情形是方程(5.1)的左端是关于y'的n次多项式，并且可以分解成n个一次实因子的乘积，即方程(5.1) 可化为

$$\left[\frac{dy}{dx}-f_1(x,\ y)\right]\left[\frac{dy}{dx}-f_2(x,\ y)\right]$$

$$\cdots\left[\frac{dy}{dx}-f_n(x,\ y)\right]=0$$

让上式左端每个因子等于零，然后积分

$$\frac{dy}{dx}=f_j(x,y)\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

求得通解为

$$u_j(x,\ y,\ c)=0\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

显然，方程(5.1) 的通解可写为

$$u_1(x,y,c)\cdot u_2(x,y,c)\cdots u_n(x,y,c)=0.$$

例1 求解$(y')^2+yy'-x^2-xy=0$

解 因为$(y')^2+yy'-x^2-xy=(y'-x)(y'+x+y)$，于是有

$$y'=x,\ y'=-x-y.$$

分别进行积分得到

$$2y=x^2+c,\ y=ce^{-x}-x+1,$$

所以原方程的隐式通解为

$$(2y-x^2-c)(y-ce^{-x}+x-1)=0.$$

特别地，当方程(5.1) 的左端只含有y'时，即

$$F(y')=0, \tag{5.2}$$

并且可以分解成n个一次实因子的积：

$$(y'-a_1)(y'-a_2)\cdots(y'-a_n)=0 \quad (a_j\neq 0).$$

于是积分

$$y'=a_j \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

得到 $y=a_jx+c$，或者写成 $a_j=\dfrac{y-c}{x}(j=1,2,\cdots n)$，这时不难看出方程(5.2) 的隐式通解是

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0.$$

例2 求解 $(y')^3-8(y')^2+17y'-10=0$。

解 因为$(y')^3-8(y')^2+17y'-10=(y'-2)(y'-1)(y'-5)$，于是方程的隐式通解可写为

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3-8\left(\frac{y-c}{x}\right)^2+17\left(\frac{y-c}{x}\right)-10=0.$$

如果方程(5.1) 能化为

$$y=f(x,\ y'), \tag{5.3}$$

这时，我们取$y'=p$为参数，有

$$y=f(x,\ p),$$

两端对x求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\ \frac{dp}{dx},$$

即

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\ \frac{dp}{dx}, \tag{5.4}$$

这是关于p的显式方程，如果求得(5.4) 的隐式解为

$$\varphi(x, p, c)=0,$$

那么方程(5.3) 的通解可表为如下的参数形式:

$$\begin{cases}\varphi(x, p, c)=0,\\ y=f(x, p).\end{cases}$$

这里p只起到参数的作用。

特别地，当(5.3) 中不显含x时，即

$$y=f(y'). \tag{5.5}$$

令$y'=p$为参数，因为$dy=y'dx$，所以在这种情况下，$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p}f'(p)dp$，从而得到

$$x=\int\frac{f'(p)}{p}dp+c,$$

于是方程(5.5) 的通解，可表为如下的参数形式

$$\begin{cases}x=\int\frac{f'(p)}{p}dp+c,\\ y=f(p).\end{cases}$$

例3 求解 $y=3(y')^4+2(y')^3-7$。

解 令$y'=p$，得

$$y=3p^4+2p^3-7,$$

$$dy=(12p^3+6p^2)dp,$$

由$dx=\frac{1}{p}dy=(12p^2+6p)dp$，得

$$x=4p^3+3p^2+c,$$

故得参数形式通解为

$$\begin{cases}x=4p^3+3p^2+c,\\ y=3p^4+2p^3-7.\end{cases}$$

例4 求解$16x^2+2y(y')^2-x(y')^3=0$。

解 就y解出，并令$y'=p$，得

$$y=\frac{xp}{2}-\frac{8x^2}{p^2},$$

两端对x求导，并以p代替y'，得到

$$p=\frac{p}{2}-\frac{16x}{p^2}+\left(\frac{x}{2}+\frac{16x^2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx},$$

或

$$\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)(p^3+32x)=0。$$

从第一个因式$p-x\dfrac{dp}{dx}=0$，得$p=cx$，即

$$x=\frac{1}{c}p$$

从而得到参数式通解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{c}p,\\ y=\dfrac{1}{2c}p^2-\dfrac{8}{c^2}.\end{cases}$$

若消去参数p，便得显式通解

$$y=\frac{c}{2}x^2-\frac{8}{c^2}\qquad(c\neq0).$$

第二个因式里未出现$\dfrac{dp}{dx}$，从它可得

$$y=-\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}x^{\frac{4}{3}}$$

显然，它是方程的解，但不包含在上面通解之中，我们称它为奇

解。

对于方程(5.1)，如能把x表示成y、y'的函数形式，即方程(5.1)可化为

$$x=f(y,\ y'). \tag{5.6}$$

将它的两端对y求导后，可完全类似地进行讨论。

例5 求解$6y^2(y')^2+3xy'-y=0$。

解 就x解出，并令$y'=p$，得

$$x=\frac{y}{3p}-2y^2p,$$

两端对y求导

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3p}-4yp-\left(\frac{y}{3p^2}+2y^2\right)\frac{dp}{dy},$$

以$\frac{1}{p}$代替$\frac{dx}{dy}$，得

$$2p+12yp^3+(y+6y^2p^2)\frac{dp}{dy}=0,$$

或

$$\left(2p+y\frac{dp}{dy}\right)(1+6p^2y)=0.$$

这里，我们只考察左端第一个因式，从$2p+y\frac{dp}{dy}=0$得

$py^2=c$，　再将$p=\frac{c}{y^2}$代入$x=\frac{y}{3p}-2y^2p$，就得通解

$$x=\frac{y^3}{3c}-2c,$$

或

$$y^3-3cx-6c^2=0.$$

例6 求解 $y=x(y')^2-(y')^3$。

解 令$y'=p$，对x求导，得：

$$p=p^2+(2xp-3p^2)\frac{dp}{dx},$$

或

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{3p}{p-1} \qquad (p-1\neq 0),$$

积分这个线性方程，得到$x=\dfrac{c-\frac{3}{2}p^2+p^3}{(p-1)^2}$因此，方程通解的参数表达式可写为

$$\begin{cases} x=\dfrac{c-\frac{3}{2}p^2+p^3}{(p-1)^2}, \\ y=\dfrac{p^2\left[c-p+\frac{1}{2}p^2\right]}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

克莱洛(Clairaut)方程．形如

$$y=y'x+\psi(y') \tag{5.7}$$

的方程是我们熟知的克莱洛方程。它对于变量x与y是线性的，并且它的通解：

$$y=cx+\psi(c)$$

正是用任意常数c代替方程(5.7)中的y'而得到。现在我们利用前面引入参数的方法来验证。

令$y'=p$，方程(5.7)化为

$$y=px+\psi(p).$$

上式两端关于x求导，得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

从而有

$$\frac{dp}{dx}[x+\psi'(p)]=0.$$

由第一个因式$\frac{dp}{dx}=0$，得$p=c$，于是得到通解：

$$y=cx+\psi(c). \tag{5.8}$$

它的几何意义是个单参数的直线族。

现在再由第二个因式等于零，就可得到

$$\begin{cases}x=-\psi'(p)\\ y=px+\psi(p)\end{cases} \tag{5.9}$$

不难验证它是方程(5.7)的解。在几何上，(5.9) 是一条曲线的参数表示式，它不能从通解(5.8)中给定数值c而得到，可是两者之间却有着密切的关系，即在曲线(5.9) 上的每一点，都有直线族(5.8)中的某一条与它相切，其切点为$(-\psi'(c),\psi(c)-c\psi'(c))$。从微分几何的有关知识可知，曲线(5.9)是直线族(5.8)的包络。这样，对于包络上的每一点，关于方程(5.7)的始值问题，解就不唯一。因此，包络(5.9)是克莱洛方程的奇解。

关于包络(5.9)，也可通过如下方式求得，即对(5.8) 式就作为参数的c求导，得$x+\psi'(c)=0$，然后再与(5.8)式联立，得

$$\begin{cases}x+\psi'(c)=0,\\ y=cx+\psi(c).\end{cases}$$

很明显，它与(5.9)的不同仅在参数的记号上，消去参数c，就得到包络的显式表达式。

例7 求解 $y=xy'+y'^2$.

解 这是克莱洛方程，它的通解可写为

$$y=cx+c^2.$$

从而包络可由

$$\begin{cases}x+2c=0,\\ y=cx+c^2,\end{cases}$$

确定，消去c得到

$$y=-\frac{x^2}{4}.$$

它是方程的奇解(图2—3)。

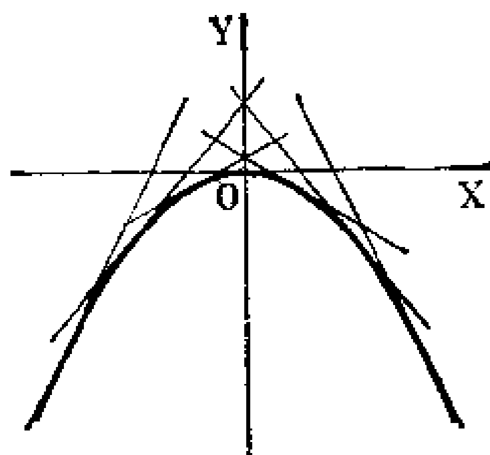


图2—3

对于一般的隐式方程(5.1)，这里仅指出引入参数的途径。为此，让$y'=p$，由(5.1)得

$$F(x,y,p)=0. \tag{5.10}$$

如果把变量x,y,p看作三维空间的坐标，那么方程(5.10) 就确定一个曲面。这时，我们可把曲面的方程写成参数式：

$$x=\varphi(u,v),\ \ y=\psi(u,v),\ \ p=\omega(u,v) \tag{5.11}$$

其中u、v为参数。显然，方程组(5.11)与方程(5.10)是等价的。由于$dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv$，$dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv$。

利用关系式 $dy=y'dx$，我们就得到关于变量u和v之间的一阶微分方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\omega(u,v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{dv}dv\right].$$

改写它为

$$\frac{dv}{du}=\frac{\omega\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{dv}-\omega\frac{\partial\varphi}{\partial v}}. \tag{5.12}$$

方程(5.12)已是前几节讨论过的情形。如果(5.12)的通解可写为

$v=K(u,c)$。

那么由(5.11)的前两个式子得到方程(5.1)的通解为：

$$x=\varphi(u,K(u,c)),\qquad y=\psi(u,K(u,c)),$$

其中c是任意常数，而u是参数。

§6 奇 解

在第一章里，我们就一阶方程引入了奇解的概念，即在它的每一点上，解的唯一性不成立。也就是说，经过奇解曲线上的每一点，至少有两条积分曲线通过。因此，为了讨论奇解，重提解的存在唯一性定理是完全必要的，这里也只对定理作较详细的叙述。

关于始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & (6.1)\\ y(x_0)=y_0 & (6.2)\end{cases}$$

解的存在唯一性定理如下：

定理2.1 设在矩形区域R：

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

上，$f(x,y)$有定义，且满足

1) $f(x,y)\in C(R)$，

2) $f(x,y)$关于y满足李普希茨(Lipschitz)条件：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

通常称L为李普希茨常数。

则在区间$|x-x_0|\leqslant h$ 上，方程 (6.1) 存在唯一的满足条件(6.2)的解。其中$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$，$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$。

顺便指出，定理中的条件2)可以用更强的条件2′)来代替：

2′) 在R上f'_y存在，且$|f'_y|\leqslant K$(K为常数)。

事实上，对于任意的$(x,y_1)\in R$，$(x,y_2)\in R$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|f'_y(x,\xi)(y_1-y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

(ξ在y_1与y_2之间)，取K为李普希茨常数即得条件2)。然而，从条件2)却不能导出条件2′)。

对于隐式方程

$$F(x,y,y')=0, \tag{6.3}$$

因为当隐式方程可化成显式方程时，一般说来，我们得到的是若干个显式方程$y'=f_i(x,y)$，$(i=1,2,\cdots k)$。如果这些方程的每一个在点(x_0,y_0)的邻域内都满足定理2.1的条件，那么，每一个方程都存在唯一的满足条件$y(x_0)=y_0$的解。所以，关于隐式方程存在唯一的满足条件(6.2)的解，应理解为沿着已给方向通过点(x_0,y_0)的积分曲线只有一条。

其次，这个问题还与数学分析中的隐函数存在定理有关。我们知道，对于方程(6.3)，如果函数$F(x,y,y')$对所有变量连续且有连续的偏导数，并在(x_0,y_0,y_0')的邻域内有$F(x_0,y_0,y_0')=0$和偏导数$F'_{y'}(x_0,y_0,y_0')\neq 0$，则有

$$y'=f(x,y)$$

及$y_0'=f(x_0,y_0)$，这里函数$f(x,y)$是连续的且有连续的偏导数。特别是

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_{y'}}. \tag{6.4}$$

这样一来，对于隐式方程(6.3)的始值问题，解的存在唯一性定理的具体提法，就完全清楚了（此定理由读者自己写出）。

按照奇解的定义，可以说定理2.1给出了在某一区域内不存

在奇解的充分条件。因此，要想奇解存在，就必须不满足定理的条件，然而，若从定理中取消条件2)(或2′)，可以证明，始值问题至少存在一个解(第四章定理4.2)，换句话说，条件2)(或2′))是保证解唯一的充分条件。因此，奇解只能经过条件2) (或2′))不满足的各点。通常我们总是用$\frac{\partial f}{\partial y}$无界来考察奇解的。至于隐式方程(6.3)，由(6.4)式可以看出，条件$\frac{\partial F}{\partial y'}=0$,将导致$\frac{\partial f}{\partial y}$无界，从而有可能破坏解的唯一性。下面我们基于这一点作粗略的讨论。

例1 求解$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+1$。

解 方程的右端是连续的，且$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$显然，当$y=x$时，$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$。直接验证可知$y=x$是方程的解。因此，如果在直线$y=x$上的各点解的唯一性被破坏，那么$y=x$是方程的奇解。

为此作变换 $z=y-x$，即可求出方程的通解为

$$y-x=\frac{(x-c)^3}{27}.$$

这个曲线族的每一条曲线都通过直线$y=x$，且在交点处的切线就是$y=x$(图2—4)。所以，在直线$y=x$上的每一点唯一性都被破坏，故$y=x$是奇解。

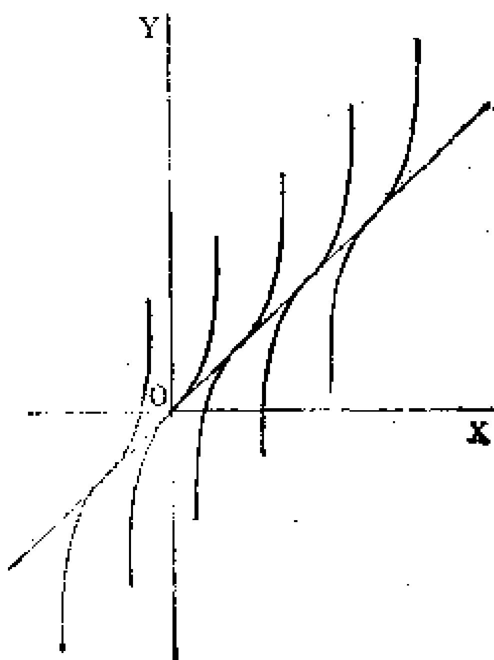


图2—4

必须指出，当$\frac{\partial f}{\partial y}$无界时，只能说方程可能会有奇解．事实上，如果将例1中的数1换成任意另一个数$k\neq 1$，那么$y=x$将不是方程$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+k$的解．虽然$f_y'$有界性不成立，可是$y=x$并不是方程的奇解。

关于隐式方程(6.3)的奇解，它应同时满足方程

$$F(x,y,y')=0 \text{ 和 } \frac{\partial F}{\partial y'}=0.$$

若记$y'=p$，即

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}=0. \end{cases}$$

消去p得到（一条或数条曲线）

$$\phi(x,y)=0, \tag{6.5}$$

我们把(6.5)式叫做p—判别曲线。因此，方程(6.3)的奇解应包含在它的p—判别曲线中。

需要注意：方程的p—判别曲线，只有当它是方程的积分曲线而且在此曲线上的点处唯一性都不成立时（一般是直接验证），才会是方程的奇解。

例2 求解 $x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3$.

解 令$y'=p$，从

$$\begin{cases} x-y=\frac{1}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3, \\ \frac{8}{9}(p-p^2)=0 \end{cases}$$

中消去p，得p—判别曲线：$y=x$和$y=x-\frac{4}{27}$，显然，函数$y=x$不是奇解。为了验证$y=x-\frac{4}{27}$是奇解，先积分原方程，得通解：

$$(y-c)^2=(x-c)^3.$$

不难验证，在直线$y=x-\frac{4}{27}$上的每一点都有半立方抛物线族$(y-c)^2=(x-c)^3$的一支与它相切(图2—5)，并且$y=x-\frac{4}{27}$满足方程，所以它是方程的奇解。

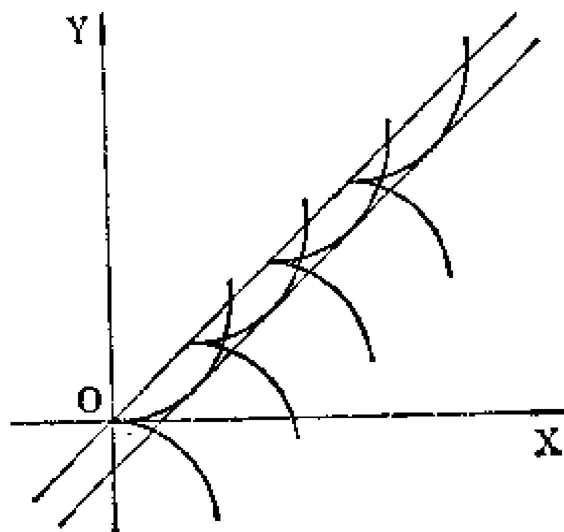


图2—5

在§5讨论克莱洛方程时，我们曾了解到微分方程的积分曲线族的包络就是该方程的奇解。因此，要求某一方程的奇解，通过求包络也是求奇解的方法之一。

设方程 $F(x,y,y')=0$ 的积分曲线族为

$$\Phi(x,y,c)=0, \quad (6.6)$$

若把c看作参数，则包络应由

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0\end{cases}$$

确定，消去参数c所得到的曲线：

$$\varphi(x,y)=0. \quad (6.7)$$

有可能是曲线族(6.6)的包络，从而它可能是方程 $F(x,y,y')=0$ 的奇解。

通常把曲线(6.7)叫做方程$F(x,y,y')=0$的c—判别曲线。

例3 求解 $y'^2=y$。

解 方程的通解是抛物线族：

$$4y=(x-c)^2,$$

从

$$\begin{cases}4y-(x-c)^2=0,\\2(x-c)=0.\end{cases}$$

中消去参数c，得c—判别曲线$y=0$，显然$y=0$是抛物线族的包络(图2—6)，所以$y=0$是方程的奇解。

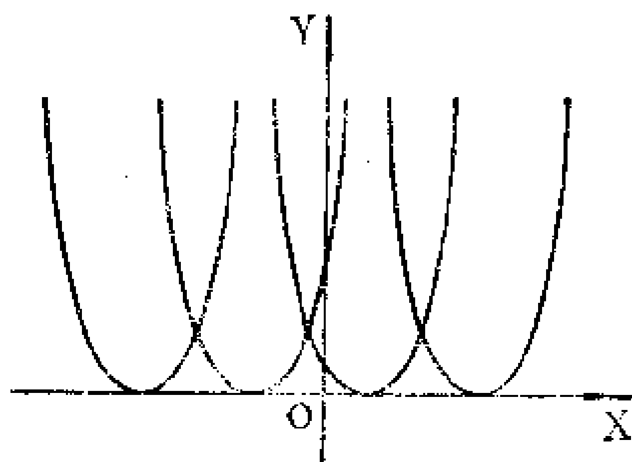


图2—6

习　　题

求下列方程的通解：

1. $\dfrac{dy}{dx}=\sin x$.

2. $x^2ydx=(1-y^2+x^2-x^2y^2)dy$

3. $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$.

4. $\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$.

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$.

6. $(x+y)\dfrac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$.

7. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{e^{y^2+3x}}{y}=0$.

8. $xy(y')^2-(x^2+y^2)y'+xy=0$.

9. 求一曲线，使其切线介于坐标轴间的部分，被切点分成相等的部分。

10. 一物体受恒力作用，沿x轴正向移动，若它的初速度是40米/秒，在5秒钟后的速度是20米/秒。求a）物体在任何时刻的速度；b）物体在任何时刻的位置（设物体从原点出发）。

求下列方程的通解：

11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x-4}{2x-y+5}$。

12. $y\sin x+y'\cos x=1$。

13. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$。

14. $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$。

15. $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$。

16. $(xy+1)ydx-xdy=0$。

17. $(2x-2y-1)dx+(x+y-2)dy=0$。

18. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{1+x}+y^2=0$。

19. $\dfrac{dy}{dx}=\cos(x-y)$。

20. $(x-y)ydx-x^2dy=0$。

21. $x^3y'=x^2y+y^3-x^3$。

22. $y'+y^2+x^2y-x=0$。

23. $y'-2xy=e^{x^2}\cos x$。

24. $y'+y\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=\varphi(x)\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ （$\varphi(x)$是x的已知可微函数）。

25. $y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$。

26. $y'=y^2-x^2-1$。

27. 求方程 $y'=2x$ 满足条件 $\int_0^1 ydx=2$的解。

28. $\dfrac{dy}{dx}+x(y-x)+x^3(y-x)^2=1$.

29. $\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}, \\ y\big|_{x=e}=2e. \end{cases}$

30. $(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$.

31. $\dfrac{dy}{dx}+x\,\mathrm{tg}(y-x)=1$.

32. 试证明：凡具有通解为$y=c\varphi(x)+\psi(x)$形状的微分方程都是线性的。

33. 若已知Riccati方程的两个特解$y_1(x)$和$y_2(x)$，试证明它的通解就可以由一次求积而得到。

根据全微分的定义，求下列方程的通解：

34. $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$.

35. $xdx+ydy+\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$.

36. $ydx+xdy+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$.

37. $(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$.

求下列方程的通解：

38. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

39. $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$.

40. $\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{y^2-x^2}{y(x^2+y^2)}dy=0$.

41. $(2xy^3-5ax^4)dx+3x^2y^2dy=0$.

42. $e^ydx+(xe^y-24)dy=0$.

43. $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$.

利用积分因子求解下列方程：

44. $xdx+ydy+4y^3(x^2+y^2)dy=0$.

45. $xdy-ydx-(1-x^2)dx=0$.

46. $-(x^2+y^2-1)dx+2xydy=0$.

47. $xdy+ydx-xy^2\ln xdx=0$.

48. 求可分离变量方程$m(x)n(y)dx+p(x)q(y)dy=0$的积分因子.

49. 设函数$f(x,y)$是关于x、y的零次齐次函数，试求齐次方程的积分因子.

50. 求出方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$有形如$\mu(x\neq y)$的积分因子的充要条件.

51. $y'^3-y'e^{2x}=0$.

52. $y=2xy'-y'^2$.

53. $y=e^{y'}+y'$.

54. $y'^2+yy'-x^2-xy=0$.

55. $x^2y'^2+4xyy'+3y^2=0$.

56. $y'^3-1=0$.

57. $y'^3-4yy'=0$.

58. $4xy'-2y+\ln y'=0$.

59. $y'^2-yy'+x=0$.

60. $y'^2-2xy'+1=0$.

61. $y=xy'+y'-y'^2$.

62. $y=xy'^2-y'^2$.

63. $x=y'^3-y'+2$.

64. $y(1+y'^2)=2a$.

65. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$.

66. $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$.

67. $(y\cos x-x\sin x)dx+(y\sin x+x\cos x)dy=0$.

68. $(3xy^3-2y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$.

69. $\cos^2y\cdot y'^2+(\sin x\cos x\cos y)y'-\sin y\cdot\cos^2x=0$.

70. $x(x-2)y'^2+(2y-2xy-x+2)y'+y^2+y=0$.

71. 求$y'^2-(1+x)yy'+xy^2=0$当$x=0$，$y=1$的解。

72. 设$f(x,y)$及$\frac{\partial f}{\partial y}$连续，试证$dy-f(x,y)dx=0$为线性方程的充分必要条件是有仅依赖于$x$的积分因子。

求下列方程的奇解。

73. $9yy'^2+4=0$。

74. $8ay'^3=27y$ $(a>0)$。

75. $y=5xy'-y'^2$。

76. $y=xy'-\sin y'$。

77. $y'=\frac{\sqrt{c^2-y^2}}{y}$。

78. 求$y=xy'+y'^2$当$x=2$，$y=-1$的解。

第三章　二阶微分方程

§1　一般概念

二阶微分方程的一般形状是

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{1.1}$$

这里x是自变量，y是未知函数。如果F对所有变量连续且有连续偏导数，并在(x_0, y_0, y_0', y_0'')的邻域内有$F(x_0, y_0, y_0', y_0'')=0$和$F'_{y''}(x_0,y_0,y_0',y_0'')\neq 0$，则根据隐函数存在定理，方程(1.1)就可按二阶导数解出

$$y''=f(x,y,y'). \tag{1.2}$$

若二阶方程(1.1)或(1.2)关于未知函数y及其一、二阶导数y'，y''均是一次的，则称它为二阶线性微分方程。其一般形状为

$$P_0(x)y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=g(x), \tag{1.3}$$

这里$P_i(x)(i=0, 1, 2)$及$g(x)$都是区间(a,b)上的连续函数。若$P_0(x)\neq 0$，则方程(1.3)可写为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{1.4}$$

这里$p(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_0(x)}$，$q(x)=\dfrac{P_2(x)}{P_0(x)}$，$f(x)=\dfrac{g(x)}{P_0(x)}$。若$g(x)=0$或$f(x)=0$，则称(1.3)、(1.4)为二阶线性齐次方程：

$$P_0(x)y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0; \tag{1.5}$$

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0. \tag{1.6}$$

我们先看一个例子

$$y''(x)=0。\tag{1.7}$$

这是最简单的二阶线性齐次方程。积分得出

$$y(x)=c_1x+c_2,\tag{1.8}$$

其中c_1、c_2是任意常数。直接可以验证，(1.8)是方程(1.7)的解。这个解族是一束直线族，我们可以用"点斜式"的办法确定直线族的某一直线。就是说，若给定了某点x_0处函数$y(x)$的值$y(x_0)$，又给定在x_0处斜率$y'(x)$的值$y'(x_0)$，即

$$y(x)\big|_{x=x_0}=y(x_0),\qquad y'(x)\big|_{x=x_0}=y'(x_0)\tag{1.9}$$

就可以从解族(1.8)中具体确定一个解$y(x)$，使之满足条件(1.9)。我们称(1.9)为初始条件。

对微分方程(1.2)，求其适合初始条件（1.9）的解的定解问题叫始值问题。关于始值问题(1.2)、(1.9)，下述存在唯一性定理成立。

定理3.1 如果函数$f(x,y,y')$在始值(x_0,y_0,y_0')邻域内对所有变量连续，且对y和y'的一阶偏导数有界，则方程(1.2)存在满足初始条件(1.9)的唯一解。

通常，我们把满足微分方程(1.2)和初始条件(1.9)的解叫做特解；把包含所有特解的解族叫做方程(1.2)的通解。例如，二阶方程$y''(x)=0$的通解为$y(x)=c_1x+c_2$，其中c_1、c_2是任意常数；而$y=x$是满足初始条件$y(0)=0$，$y'(0)=1$的特解，且包含在通解之中。

二阶方程，尤其是二阶线性方程是最主要的高阶方程。这是因为人们从生产实际和科学技术的实验中提出了大量的二阶微分方程问题，同时还由于二阶线性齐次方程所定义的一类特殊函数在生产实际中有着广泛的应用。此外，二阶方程也是研究高阶方

程的基础，特别是二阶线性方程的理论，一般都可推广到高阶线性方程中去。

§2 线 性 方 程

二阶线性微分方程的通解，一般说来不能用初等积分法求得，这是它与一阶线性方程一个很大的区别．因此，这一节的主要任务是从理论上弄清楚二阶线性微分方程通解的结构，其中处理问题的思路对我们今后学习来说，将是很重要的．

1.预备知识．为了便于以后的讨论，这里需要引进实变量的复值函数、函数的线性相关和线性无关、朗斯基(Wronski)行列式等概念。

设x是实自变量，i为虚数单位，$u(x)$、$v(x)$是实值函数．若令$y(x)=u(x)+iv(x)$，则称函数$y(x)$为实变量的复值函数，例如，$y(x)=\cos x+i\sin x$，当x是实自变量时它就是个复值函数．

若函数$u(x)$，$v(x)$都有直到n阶的连续导数，则称$y(x)=u(x)+iv(x)$为n阶连续可微函数，并记为

$$y^{(n)}(x)=u^{(n)}(x)+iv^{(n)}(x).$$

根据复数的基本性质，若$y(x)=u(x)+iv(x)\equiv0$，则有$u(x)\equiv0$，$v(x)\equiv0$；反之，若$u(x)\equiv0$，$v(x)\equiv0$，则有$y(x)\equiv0$．

定义1 设$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$是定义在区间(a,b)内的函数，且存在不全为零的常数c_1和c_2，使得在(a,b)内的一切x都有恒等式

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\equiv0$$

成立，则称函数$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在(a,b)内是线性相关的；反之，则称函数$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在(a,b)内是线性无关的．

类似地，可以给出多个函数的线性相关和线性无关的定义．

例1 函数1和x在任何区间内是线性无关的。

解 若有恒等式

$$c_1+c_2x\equiv 0$$

成立，则对上式求导，有$c_2=0$，从而$c_1=0$。由定义1可知函数1和x是线性无关的。

例2 若常数$k_1\neq k_2$，则函数e^{k_1x}和e^{k_2x}在任何区间内线性无关。

解 若e^{k_1x}与e^{k_2x}线性相关，则有恒等式

$$c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}\equiv 0$$

成立，其中至少有一个$c_i\neq 0$，譬如$c_2\neq 0$。将上式除以e^{k_1x}且微分之，得到

$$(k_2-k_1)c_2e^{(k_2-k_1)x}\equiv 0.$$

根据假定$c_2\neq 0$，$k_1\neq k_2$，上式不可能成立，于是引出了矛盾.所以函数e^{k_1x}和e^{k_2x}在任何区间内线性无关。

定义2 设$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$是定义在区间(a,b)内的连续可微函数，则称函数行列式

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

为$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$的朗斯基行列式，记作$W(x)$或$W[\varphi_1,\varphi_2]$。

类似地，可以定义多个函数的朗斯基行列式。

例3 求$\cos x$，$\sin x$的朗斯基行列式的值。

解 因为$(\cos x)'=-\sin x$，$(\sin x)'=\cos x$，所以

$$W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1.$$

2.线性齐次方程. 这一段将要系统地介绍线性齐次方程的理论，它是本节的核心内容。

对于线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{2.1}$$

我们设函数$p(x)$与$q(x)$在区间(a,b)内连续．可以证明方程(2.1)的所有解组成一个线性空间。

定理3.2 若$y_1(x)$，$y_2(x)$是线性齐次方程(2.1)的解，则它们的线性组合

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

也是方程(2.1)的解。其中c_1，c_2是任意常数。

证明　已知

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0,$$

$$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

从而有

$$\begin{aligned}&(c_1y_1+c_2y_2)''+p(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+q(x)(c_1y_1+c_2y_2)\\&=c_1(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)+c_2(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2)\\&=0,\end{aligned}$$

所以$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$是方程(2.1)的解。

显然，$y\equiv0$是线性齐次方程(2.1)的解，我们称它为平凡解。

下面介绍方程(2.1)的唯一性定理。

定理3.3(唯一性定理) 对于线性齐次方程(2.1)，如果函数$p(x)$，$q(x)$在区间$[a,b]$上连续，则方程(2.1)满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'\quad(a<x_0<b) \tag{2.2}$$

的解是唯一的。

证明　假设方程(2.1)有两个满足条件(2.2)的解$y_1(x)$和$y_2(x)$。令

$$y(x)=y_1(x)-y_2(x),$$

则有

$$y(x_0)=y_1(x_0)-y_2(x_0)=0,$$

$$y'(x_0)=y_1'(x_0)-y_2'(x_0)=0.$$

考虑函数

$$u(x)=y^2(x)+y'^2(x),$$

显然$u(x_0)=0$，由于

$$\begin{aligned}u'(x)&=2yy'+2y'y''\\&=2y'(y-p(x)y'-q(x)y)\\&=-2p(x)y'^2+2yy'(1-q(x)),\end{aligned}$$

因为$2yy'\leqslant y^2+y'^2$， 从而 $2yy'(1-q(x))\leqslant(1+|q(x)|)(y^2+y'^2)$，所以

$$u'(x)\leqslant(1+|q(x)|)y^2+(1+|q(x)|+2|p(x)|)y'^2.$$

令$k=1+\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}[|q(x)|+2|p(x)|]$，于是得到

$$u'(x)\leqslant ku(x).$$

不等式两端同乘以正号函数e^{-kx}，得

$$u'(x)e^{-kx}-ku(x)e^{-kx}\leqslant0,$$

即

$$(u(x)e^{-kx})'\leqslant0$$

积分得

$$u(x)\leqslant u(x_0)e^{-kx_0}=0.$$

根据函数$u(x)$的定义，知道它是非负的，所以

$$u(x)\equiv0.$$

从而有$y(x)\equiv0$，即

$$y_1(x)\equiv y_2(x).$$

定理3.3告诉我们，如果方程(2.1)有一个解满足零初始条件(即$y(x_0)=0$，$y'(x_0)=0$)，那么这个解就一定是平凡解。

例4 试证$\cos at=\dfrac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$，$\sin at=\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$。其中$a$是实常数。

证明 考虑二阶线性齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0.$$

这里系数$p(t)=0$，$q(t)=1$，显然满足定理3.3的条件.取$t_0=0$，并令

$$x_{11}(t)=\cos at,\quad x_{12}=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2},$$

$$x_{21}(t)=\sin at,\quad x_{22}=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}.$$

于是有

$$x_{11}(0)=x_{12}(0)=1,\quad x_{11}'(0)=x_{12}'(0)=0;$$

$$x_{21}(0)=x_{22}(0)=0,\quad x_{21}'(0)=x_{22}'(0)=a.$$

可以直接验证$x_{ij}(t)(i,j=1,2)$均是所给方程的解,而且解$x_{11}(t)$与$x_{12}(t)$，$x_{21}(t)$与$x_{22}(t)$又都分别满足相同的初始条件。根据定理3.3，有

$$x_{11}(t)\equiv x_{12}(t),\quad x_{21}(t)\equiv x_{22}(t).$$

即

$$\cos at=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2},\quad \sin at=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}.$$

问题得证。

若用i乘以$\sin at=\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$的两边再与$\cos at=\dfrac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$相加，便得到著名的尤拉(Euler)公式：

$$e^{i\alpha t}=\cos\alpha t+i\sin\alpha t \tag{2.3}$$

定理3.4 设$y_1(x)$，$y_2(x)$是方程(2.1)的两个解，则在区间(a,b)内线性相关的充要条件是它们的朗斯基行列式$W(x)=0$。

证明 先证必要性。设$y_1(x)$，$y_2(x)$线性相关，即存在不全为零的常数c_i $(i=1,2)$，使得在(a,b)内有恒等式

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$$

成立。求导上式得线性齐次代数方程组

$$\begin{cases}c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0,\\ c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=0.\end{cases} \tag{2.4}$$

由于c_1，c_2不全为零，所以(2.4)的系数行列式$W(x)=0$。

再证明充分性。设$W(x)$在$x_0(a<x_0<b)$处为零，即

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}=0.$$

今考虑线性齐次代数方程组

$$\begin{cases}c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0,\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0.\end{cases}$$

因为其系数行列式$W(x_0)=0$，故有非零解c_1,c_2。对此c_i $(i=1,2)$我们作线性组合

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

显然它是方程(2.1)的解，且有$y(x_0)=0$，$y'(x_0)=0$。由唯一性定理得知$y(x)\equiv0$，即

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\equiv0.$$

定理3.5 设$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程（2.1）的两个线性无关特解，则线性组合

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{2.5}$$

就是(2.1) 的通解，其中c_1，c_2是任意常数。

证明　我们只要证明具有任一初始条件的特解，都包含在(2.5)式之中。为此，无妨设$y(x)$是方程(2.1)满足条件$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y'_0$的一个特解($a<x_0<b$)，令

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0, \\ c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)=y'_0. \end{cases}$$

由于$y_1(x)$和$y_2(x)$线性无关，根据定理(3.4) 知$W(x_0)\neq0$，从而c_1，c_2唯一确定。作为方程(2.1)的解$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$与$y(x)$在$x=x_0$处有相同的初始条件，根据唯一性定理，得到

$$y(x)\equiv c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

所以(2.5)式是方程(2.1)的通解。

推论　二阶线性齐次方程的线性无关解的最大个数是2。

定理3.6　若$y_1(x)$，$y_2(x)$是方程(2.1)的两个解，则有

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\qquad(a<x_0<b)\qquad(2.6)$$

证明　因为$y_1(x)$，$y_2(x)$是方程(2.1) 的解，所以

$$y''_1+p(x)y'_1+q(x)y_1=0,$$

$$y''_2+p(x)y'_2+q(x)y_2=0.$$

前一式乘以y_2再减去后一式乘以y_1，得

$$y_2y''_1-y_1y''_2+p(x)(y_2y'-y_1y'_2)=0,$$

即

$$\frac{d}{dx}(y_1y'_2-y'_1y_2)+p(x)(y_1y'_2-y'_1y_2)=0,$$

或

$$\frac{d}{dx}W(x)+p(x)W(x)=0,$$

从x_0到x积分得

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}$$

公式(2.6)叫做刘维尔(Liouville)公式。

如果线性齐次方程(2.1)的解$y_1(x)$与$y_2(x)$是线性无关的，我们就称$y_1(x)$与$y_2(x)$为方程(2.1)的一个基本解组。

定理3.7 线性齐次方程(2.1) 的基本解组是存在的。

证明 根据存在唯一性定理3.1，对于方程(2.1)，下列两个始值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \\ y(x_0)=1, \ y'(x_0)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \\ y(x_0)=0, \ y'(x_0)=1 \end{cases}$$

分别存在唯一解$y_1(x)$和$y_2(x)$。因为

$$W[y_1,y_2]=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}=e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\neq 0$$

所以解$y_1(x)$与$y_2(x)$线性无关。从而它们是方程(2.1) 的一个基本解组。

例5 已知$y_1(x)$是方程 (2.1) 的一个非平凡解，试求另一个线性无关解。

解 由刘维尔公式，有

$$W[y_1,\ y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau},$$

设$W(x_0)=1$，于是得到一个关于$y_2(x)$的一阶线性微分方程

$$y_2'-\frac{y_1'}{y_1}y_2=\frac{1}{y_1}e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}.$$

容易求得它的一个特解为

$$y_2=y_1\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{t}p(\tau)d\tau}\frac{dt}{y_1^2(t)}.$$

显然$y_2(x)$是方程(2.1) 的一个解，且$W[y_1,y_2]\neq 0$。即$y_2(x)$与$y_1(x)$线性无关。

3.线性非齐次方程。 线性非齐次方程的一般形状为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2.7}$$

这里$p(x)$，$q(x)$和$f(x)$都是区间(a,b)内的连续函数，其中$f(x) \neq 0$。与非齐次方程(2.7)对应的线性齐次方程是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

它们有相同的系数。下面我们来研究非齐次方程(2.7)的通解结构。

定理3.8 若$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_k(x)$分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

的解$(i = 1, 2, \cdots, k)$，则$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$便是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_ky_k(x) \tag{2.8}$$

的解。其中c_1，c_2，…，c_k是任意常数。

证明 由已知条件得

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f_1(x),$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f_2(x),$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_k'' + p(x)y_k' + q(x)y_k = f_k(x).$$

以上k个等式分别乘以c_1，c_2，c_3，…，c_k，再相加得

$$\begin{aligned}&(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2 \\ &+ \cdots + c_ky_k)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k) \\ &= c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x).\end{aligned}$$

即

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x).$$

所以$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$是方程(2.8)的解。

定理3.8称为线性非齐次方程的叠加原理。由此可直接推知，

非齐次方程(2.7) 的一个解与它所对应齐次方程的解之和仍然是非齐次方程(2.7)的解。

定理3.9 若方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \overline{U}(x) + i\overline{V}(x) \qquad (2.9)$$

中，$p(x)$，$q(x)$，$\overline{U}(x)$和$\overline{V}(x)$都是实函数，而且$y(x) = u(x) + iv(x)$是方程(2.9) 的解。则$u(x)$，$v(x)$分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \overline{U}(x),$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \overline{V}(x)$$

的解.

证明 因为

$$[u(x) + iv(x)]'' + p(x)[u(x) + iv(x)]'$$
$$+ q(x)[u(x) + iv(x)]$$
$$= \overline{U}(x) + i\overline{V}(x),$$

于是有

$$u'' + p(x)u' + q(x)u + i[v'' + p(x)v' + q(x)v]$$
$$= \overline{U}(x) + i\overline{V}(x)$$

根据复数的基本性质可知，两边的实部和虚部必须分别相等，即

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = \overline{U}(x),$$

$$v'' + p(x)v' + q(x)v = \overline{V}(x).$$

定理3.10 设$\overline{y}(x)$是非齐次方程(2.7)的一个特解，$y_1(x)$和$y_2(x)$是对应齐次方程的两个线性无关的解。则

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \overline{y}(x) \qquad (2.10)$$

是方程(2.7) 的通解。其中c_1，c_2是任意常数。

证明 表示式(2.10) 显然是非齐次方程(2.7) 的解。设$y=\varphi(x)$是方程(2.7) 的任一解，我们只要证明可由(2.10)适当选取任意常数c_1、c_2把它表示出来即可。

由于

$$\varphi''+p(x)\varphi'+q(x)\varphi=f(x),$$

$$\bar{y}''+p(x)\bar{y}'+q(x)\bar{y}=f(x).$$

两式相减，得到

$$(\varphi-\bar{y})''+p(x)(\varphi-\bar{y})'+q(x)(\varphi-\bar{y})=0,$$

这说明$\varphi-\bar{y}$是对应齐次方程(2.1) 的一个解，从而必存在常数$\bar{c}_1$，$\bar{c}_2$，使

$$\varphi-\bar{y}=\bar{c}_1y_1+\bar{c}_2y_2,$$

即

$$\varphi(x)=\bar{c}_1y_1(x)+\bar{c}_2y_2(x)+\bar{y}(x).$$

所以(2.10) 式是方程(2.7) 的通解。

从(2.10) 式可以看出，二阶线性非齐次方程的通解也是由两部分组成：一部分是对应齐次方程的通解，另一部分是非齐次方程本身的一个特解。这和一阶线性非齐次方程的通解结构完全一样。如果对应齐次方程的通解已知，那么关键就是要求出非齐次方程的一个特解。

例6 求方程

$$y''+y=5x$$

的通解。

解 已知对应齐次方程$y''+y=0$的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

容易看出$y=5x$是它的一个特解。因此，它的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+5x.$$

4.常数变易法。对于线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),$$

当我们已经求出它的对应齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的通解之后，如何去求它的一个特解呢？如同讨论一阶线性非齐次方程的解法一样，这里也可采用常数变易法。

设$y_1(x)$，$y_2(x)$是对应齐次方程的一个基本解组，于是(2.1)的通解可写为

$$y=c_1y_1+c_2y_2,$$

其中c_1、c_2是任意常数。为了求得(2.7)的一个特解，我们把c_1、c_2看作是自变量x的待定函数，要定出这两个新的未知函数，显然需要两个方程。其中一个自然是方程(2.7)，而要得到另一个方程，我们可使函数

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2 \tag{2.11}$$

的一阶导数

$$y'=c_1(x)y_1'+c_2(x)y_2'+c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2$$

仍然具有c_1、c_2为常数时的形状，因此令

$$c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2=0 \tag{2.12}$$

从而有

$$y'=c_1(x)y_1'+c_2(x)y_2'.$$

这里(2.12)就是我们所要的第二个方程。

对y'再求导一次，得

$$y''=\sum_{i=1}^{2}c_i(x)y_i''+\sum_{i=1}^{2}c_i'(x)y_i',$$

然后将y，y'和y''代入方程(2.7)：

$$\sum_{i=1}^{2} c_i(x)\, y_i'' + \sum_{i=1}^{2} c_i'(x) y_i' + p(x) \sum_{i=1}^{2} c_i(x) y_i'$$

$$+ q(x) \sum_{i=1}^{2} c_i(x) y_i = f(x),$$

即

$$\sum_{i=1}^{2} c_i(x)[y_i'' + p(x) y_i' + q(x) y_i] + \sum_{i=1}^{2} c_i'(x) y_i' = f(x).$$

因为y_i $(i=1,2)$是(2.1)的解，于是得到

$$c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2 = f(x). \qquad (2.13)$$

这样一来，由(2.12)与(2.13)联合成关于$c_1'(x)$，$c_2'(x)$的一个线性非齐次代数方程组：

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0, \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (2.14)$$

它的系数行列式就是基本解组y_1，y_2的朗斯基行列式，所以有

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

故可由(3.14) 解出

$$c_1'(x) = \frac{-y_2 f}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1 f}{W(x)}.$$

积分，取任意常数为零(只需一个特解)，则得

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(\tau) f(\tau)}{W(\tau)} d\tau, \quad c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(\tau) f(\tau)}{W(\tau)} d\tau.$$

从而求得非齐次方程(2.7) 的一个特解为

$$\overline{y}(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(\tau) f(\tau)}{W(\tau)} d\tau + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(\tau) f(\tau)}{W(\tau)} d\tau$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(\tau)y_2(x)-y_1(x)y_2(\tau)}{W(\tau)}f(\tau)d\tau.$$

例 7 求方程

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}$$

的一个特解。

解 由于对应齐次方程的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x,$$

于是有

$$y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x.$$

相应于(2.14)的方程组为

$$\begin{cases}c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0,\\-c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}.\end{cases}$$

从而有

$$c_1'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x},\quad c_2'(x)=1,$$

积分得

$$c_1(x)=\ln|\cos x|,\quad c_2(x)=x.$$

所以求得原方程的一个特解为

$$\overline{y}(x)=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.$$

例 8 求方程

$$xy''-y'=x^2$$

的通解。

解 先把方程化为

$$y''-\frac{1}{x}y'=x,$$

然后求其对应齐次方程$y''-\frac{1}{x}y'=0$ 的通解。对$\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}$积分得

$y'=c_1x$，从而通解可写成

$$y=c_1\frac{x^2}{2}+c_2.$$

即$\frac{x^2}{2}$和 1 为其基本解组。

为了求出原方程的一个特解，改写上式为

$$y=c_1(x)\frac{x^2}{2}+c_2(x),$$

其中$c_1(x)$、$c_2(x)$由方程组

$$\begin{cases} c_1'(x)\dfrac{x^2}{2}+c_2'(x)=0, \\ c_1'(x)x+0=x \end{cases}$$

确定．求得

$$c_1'(x)=1, \qquad c_1(x)=x;$$

$$c_2'(x)=-\frac{x^2}{2}, \quad c_2(x)=-\frac{x^3}{6}.$$

故特解为

$$\overline{y}(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{3}.$$

所以原方程的通解为

$$y(x)=\overline{c}_1+\overline{c}_2x^2+\frac{x^3}{3}.$$

5．线性方程组． 我们考虑形如

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=a_{11}(x)y+a_{12}(x)z+f_1(x) \\ \dfrac{dz}{dx}=a_{21}(x)y+a_{22}(x)z+f_2(x) \end{cases} \tag{2.15}$$

的一阶线性微分方程组．这里y、z是未知函数，而$a_{ij}(x)$，

$f_i(x)$ ($i=1, 2$)是已知的，它们在区间 (a, b) 内连续可微。关于方程组 (2.15) 的讨论，分以下两种情况：

若$a_{12}(x)$和$a_{21}(x)$均不为零时，可用消去一个未知函数的方法将方程组 (2.15) 化成一个二阶线性方程。事实上，对(2.15)的第一个方程求导，得

$$y''=a_{11}(x)y'+a_{12}(x)z'+a'_{11}(x)y+a'_{12}(x)z+f'_1(x) \tag{2.16}$$

现在我们就可从方程(2.16)及(2.15)的两个方程中消去 z 和 z' 而得到 y 所适合的二阶方程。为此先由 (2.15) 的第一个方程得

$$z=\frac{1}{a_{12}}y'-\frac{a_{11}}{a_{12}}y-\frac{f_1}{a_{12}},$$

再将 z 代入 (2.15) 的第二个方程得

$$z'=\frac{a_{22}}{a_{12}}y'+\frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{12}}y-\frac{a_{22}f_1}{a_{12}}+f_2,$$

然后将 z 和z'代入方程 (2.16)，即得

$$y''-\left(a_{11}+a_{22}+\frac{a'_{12}}{a_{12}}\right)y'+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a'_{11}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_{11}a'_{12}}{a_{12}}\right)y=f'_1+a_{12}f_2-a_{22}f_1-\frac{a'_{12}f_1}{a_{12}}. \tag{2.17}$$

如果记$p(x)=-\left(a_{11}+a_{22}+\dfrac{a'_{12}}{a_{12}}\right)$，$q(x)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a'_{11}$ $+\dfrac{a_{11}a'_{12}}{a_{12}}$，$f(x)=f'_1+a_{12}f_2-a_{22}f_1-\dfrac{a'_{12}f_1}{a_{12}}$，则 (2.17)就可写成

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x).$$

这是我们在前面已经讨论过的二阶线性方程。

若$a_{12}(x)$、$a_{21}(x)$中至少有一个恒为零。这时方程 (2.15)

的积分问题就等于分别积分两个一阶线性微分方程。譬如，设 $a_{12}(x)\equiv 0$，则（2.15）的第一个方程就是关于未知函数y的一阶线性方程；将解出的 y 代入第二个方程，即得关于未知函数 z 的一阶线性方程。

由此可知，二阶线性微分方程的理论对于线性微分方程组（2.15）完全适用。

例 9 化一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-2y-3z,\\ \dfrac{dz}{dx}=-7y+6z\end{cases}$$

为二阶方程。

解 对方程组的第一个方程求导，得

$$y''=-2y'-3z',$$

再由方程组得到

$$z'=-2y'-11y,$$

代入上式得

$$y''-4y'-33y=0.$$

§3 常系数线性齐次方程

前一节的讨论告诉我们，对于二阶线性齐次方程的求解问题，可归结为寻找它的两个（线性无关）或一个特解。但是，除了一些特殊类型的方程外，对于一般的二阶线性齐次方程却是一个难题。它不象一阶线性方程那样总可化为求积的形式。这一节我们仅对常系数和可化为常系数的线性齐次方程的求解问题作些讨论。

1.常系数线性齐次方程 它的一般形状为。

$$ay''+by'+cy=0, \tag{3.1}$$

其中系数$a\neq 0$，a、b、c都是常数。我们研究将如何求出（3.1）的通解。

求解方程(3.1）的问题，实质上是要找一个函数，使得这个函数和它的一、二阶导函数是线性相关的。数学分析告诉我们，指数函数e^{rx}是具备这个特性的。因此，设方程(3.1）有形式为

$$y=e^{rx} \tag{3.2}$$

的特解，其中r是待定常数．由于$y'=re^{rx}$，$y''=r^2e^{rx}$，我们把（3.2）代入方程(3.1)，得

$$(ar^2+br+c)e^{rx}=0,$$

而$e^{rx}\neq 0$，所以有

$$ar^2+br+c=0。 \tag{3.3}$$

这是一个以r为未知数的一元二次代数方程．不难看出，只要r是(3.3）的根，则e^{rx}就一定是方程(3.1）的解。我们称(3.3）为方程(3.1）的特征方程，而称它的根为方程(3.1）的特征根。这样一来，求微分方程(3.1)解的问题，就归结为求特征方程(3.3)根的问题。而(3.3）的根可写成

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

因为判别式b^2-4ac有三种可能的情形，现在分别讨论如下：

i）$b^2-4ac>0$，此时r_1，r_2是（3.3）的两个不同实根．由(3.2)得到方程(3.1)的两个特解为

$$y_1=e^{r_1x},\qquad y_2=e^{r_2x}。$$

由于$r_1\neq r_2$，故y_1和y_2线性无关．因此，方程(3.1）的通解为

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x},$$

其中c_1，c_2是任意常数。

例 1　求$y''+2y'-3y=0$的通解。

解　它的特征方程

$$r^2+2r-3=0$$

有两个相异的实根$r_1=1$和$r_2=-3$。因此，得到两个线性无关解$y_1=e^x$，$y_2=e^{-3x}$。从而通解为

$$y=c_1e^x+c_2e^{-3x}.$$

ii）$b^2-4ac=0$。此时$r_1=r_2=-\dfrac{b}{2a}$，即特征根是重根，从而只能得到一个特解。

$$y_1=e^{r_1x}.$$

为了找出方程(3.1)的另一个与y_1线性无关的解，我们利用§2给出的刘维尔公式

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ y_2' & y_1' \end{vmatrix}=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}$$

这里取$x_0=0$，$W(x_0)=1$，于是有

$$y_1y_2'-y'y_2=e^{-\int_0^x p(\tau)d\tau},$$

再以y_1^2除上式的两端，得到

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_0^x p(\tau)d\tau},$$

两边从 0 到 x 积分，因$p(x)=\dfrac{b}{a}$，故有

$$\frac{y_2}{y_1}=\int_0^x\frac{1}{(e^{r_1x})^2}e^{-\frac{b}{a}x}dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{e^{2r_1x}}e^{2r_1x}dx=x,$$

从而得到

$$y_2 = xy_1 = xe^{r_1x}.$$

显然，$y_1 = e^{r_1x}$和$y_2 = xe^{r_1x}$是两个线性无关解。所以通解为

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x},$$

其中c_1，c_2是任意常数。

例 2 求方程$y'' - 2y' + y = 0$的通解。

解 它的特征方程为

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

$r_1 = r_2 = 1$是重根，因此 e^x，xe^x 是它的一个基本解组，从而通解为

$$y = c_1e^x + c_2xe^x.$$

iii) $b^2 - 4ac < 0$。此时r_1和r_2是一对共轭复根，记

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta,$$

其中$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$，$\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$，从而得到方程（3.1）的两个复值解。

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

为了得到两个线性无关的实值解，我们利用尤拉公式，则

$$y_1 = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

根据定理3.9，推得

$$\overline{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\overline{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

也是方程(3.1) 的解，而且是两个实值解。由于

$$W[\overline{y_1}, \overline{y_2}] = \begin{vmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} \\ \overline{y_1'} & \overline{y_2'} \end{vmatrix} = \beta e^{\alpha x} \neq 0,$$

所以$\overline{y_1}$和$\overline{y_2}$是两个线性无关解。因此通解为

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x),$$

其中c_1，c_2是任意常数。

例3 求$y'' + 4y' + 5y = 0$的通解。

解 它的特征方程为

$$r^2 + 4r + 5 = 0,$$

求得一对共轭复根$r_1 = -2 + i$，$r_2 = -2 - i$；这里$\alpha = -2, \beta = 1$，于是得到原方程的两个实值解为

$$\overline{y_1} = e^{-2x}\cos x, \quad \overline{y_2} = e^{-2x}\sin x,$$

从而通解为

$$y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

2. 可化为常系数的方程. 对于变系数的二阶线性齐次方程，一般而言没有统一的解法，但对一些特殊的变系数方程，即通过变量代换可化为常系数的方程，还是可以求解的。如尤拉方程：

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{3.4}$$

可用自变量变换 $x = \varphi(t)$ 将它化为常系数的线性齐次方程。

事实上，设$x = \varphi(t)$，则有$dx = \varphi'(t)dt$。因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}\frac{dy}{dt}.$$

代入方程（3.4），得

$$a\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \left(b\frac{\varphi}{\varphi'} - a\frac{\varphi^2\varphi''}{\varphi'^3}\right)\frac{dy}{dt} + cy = 0.$$

令$\frac{\varphi}{\varphi'}=1$，于是由$\frac{\varphi'}{\varphi}=1$推得$x=e^t$，从而有

$$b\frac{\varphi}{\varphi'}-a\frac{\varphi^2\varphi''}{\varphi'^3}=b-a.$$

因此，通过自变量变换$x=e^t$，方程(3.4) 就可变成

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=0. \tag{3.5}$$

而 (3.5)是常系数方程。

例 4 求方程$2x^2y''+5xy'+y=0$的通解。

解 由于此方程是尤拉方程，故可通过$x=e^t$将它变换为

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=0$$

这是个常系数方程，可求出两个线性无关解为 $y_1=e^{-t}$ 和 $y_2=e^{-\frac{1}{2}t}$，从而得到原方程的一个基本解组为

$$y_1=\frac{1}{x},\ y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

所以通解为

$$y=c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

除尤拉方程外，还有一些变系数方程亦可化为常系数方程。为此先引进如下概念。

我们称形如

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right)+Q(x)y=0 \tag{3.6}$$

的二阶线性齐次方程为自共轭方程。

对于二阶线性齐次方程

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

$$(p_0(x) \neq 0,\ p_0'(x) \in C(I)) \tag{3.7}$$

我们总可将它化为自共轭方程。

事实上，给(3.7) 乘以正函数$e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0} dx}$，得

$$p_0(x)e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0} dx} y'' + p_1(x)e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p} dx} y'$$

$$+ p_2(x)e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p} dx} y = 0.$$

令

$$P(x) = p_0(x)e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0} dx},\quad Q(x) = p_2(x)e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p} dx}, \tag{3.8}$$

于是有 $P'(x) = p_1(x)e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0} dx}$，这样(3.7) 就化为

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right) + Q(x)y = 0.$$

其中$P(x)$、$Q(x)$由 (3.8)确定。

对于自共轭方程，我们有

定理3.11 方程 (3.6)能化成常系数方程的充要条件是

$$\frac{1}{|Q|}\frac{d}{dx}(P|Q|)^{\frac{1}{2}} = k\,(\text{const}). \tag{3.9}$$

证明 先证必要性。因为常系数方程

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (a > 0)$$

可化为自轭方程，这里

$$P(x) = ae^{\int \frac{b}{a} dx} = ae^{\frac{b}{a}x},\ Q(x) = ce^{\frac{b}{a}x}.$$

于是

$$\frac{1}{|Q|}\frac{d}{dx}(P|Q|)^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{(a|c|)^{1/2}} = \text{const}$$

所以(3.9)成立。

再证充分性。不失一般性可设$Q(x)>0$，作变换$x=\varphi(t)$，于是方程(3.6) 变为

$$P\left(\frac{1}{\varphi'}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{P'}{\varphi'}-\frac{P\varphi''}{\varphi'^3}\right)\frac{dy}{dt}+Qy=0,$$

或写成

$$\frac{P}{Q}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{P'}{Q\varphi'}-\frac{P\varphi''}{Q\varphi'^3}\right)\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{3.10}$$

令$\frac{P}{Q}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)^2=1$ 推得

$$\varphi'=\left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \varphi''=\frac{P'Q-PQ'}{2Q^2}.$$

而 $$\frac{P'}{Q\varphi'}=\frac{P'}{(PQ)^{1/2}},\quad \frac{P\varphi''}{Q\varphi'^3}=\frac{P'Q-PQ'}{2Q(PQ)^{1/2}},$$

于是只要

$$\frac{P'}{Q\varphi'}-\frac{P\varphi''}{Q\varphi'^3}=\frac{P'}{(PQ)^{1/2}}-\frac{QP'-PQ'}{2Q(PQ)^{1/2}}=\frac{1}{Q}\frac{d}{dx}(PQ)^{\frac{1}{2}}$$

$$=k.$$

方程(3.6) 就可化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{3.11}$$

即在条件 (3.9) 成立时，(3.10) 为常系数方程。

如果$Q<0$，则可令$a(x)=-Q(x)>0$，这时(3.6)可写为

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right)-a(x)y=0, \tag{3.6}$$

而(3.11)相应地变为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k\frac{dy}{dt}-y=0 \tag{3.11'}$$

例 5 证明方程

$$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0 \qquad (-1<x<1,\ a\text{是常数})$$

能够化为常系数方程。

证明 首先把方程化为自共轭方程，因为

$e^{\int\frac{p-p_0'}{p_0}dx}=e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，故以$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$乘方程得到

$$\sqrt{1-x^2}y''-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y'+\frac{a^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0$$

或写成

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{a^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0.$$

令 $P(x)=\sqrt{1-x^2}$， $Q(x)=\frac{a^2}{\sqrt{1-x^2}}>0$，由于

$$\frac{1}{Q}\frac{d}{dx}(PQ)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{a^2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{a^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

是个常数，根据定理3.11知，方程可化为常系数方程，且形状为

$$\frac{d^2y}{dt}+y=0.$$

现在我们来考察，用函数代换将方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{3.12}$$

化为常系数方程的途径，为此作线性变换，

$$y(x)=\alpha(x)z(x),$$

这里$\alpha(x)$是待定函数，$z(x)$是新的未知函数．由于

$$y'=\alpha(x)z'+\alpha'(x)z,\quad y''=\alpha(x)z''+2\alpha'(x)z'$$
$$+\alpha''(x)z,$$

代入(3.12)，得

$$\alpha(x)z''+[2\alpha'(x)+p(x)\alpha(x)]z'+[\alpha''(x)+p(x)\alpha'(x)+$$

$$+q(x)\alpha(x)]z=0$$

或者

$$z''+\left[\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)}+p(x)\right]z'+\left[\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)}+p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}+q(x)\right]z$$

$$=0。\qquad(3.13)$$

今选定$\alpha(x)$，使(3.13)一阶导数项的系数为零，即令

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)}+p(x)=0,$$

从而

$$\alpha(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}.$$

因为$\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}=-\frac{1}{2}p(x)$，$\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)$，所以

$$\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)}+p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}+q(x)=q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x).$$

于是通过未知函数的线性变换

$$y=ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx},\qquad(3.14)$$

可将方程(3.12)化为

$$z''+I(x)z=0。$$

其中$I(x)=q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)$，称为方程(3.12)的不变式。

这样一来，如果方程（3.12）的不变式$I(x)$是个常数，那么就可由变换式（3.14）将它化为常系数线性齐次方程。

例6 求方程$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$的通解。

解 这里$p(x)=\frac{2}{x}$，$q(x)=1$，因为不变式

$$I(x)=q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)=1,$$

所以可通过线性变换

$$y=ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}=\frac{z}{x},$$

将方程化为

$$z''+z=0。$$

这个常系数方程的通解为

$$z=c_1\cos x+c_2\sin x,$$

从而求得原方程的通解为

$$y=c_1\frac{\cos x}{x}+c_2\frac{\sin x}{x}.$$

§4 常系数线性非齐次方程

二阶常系数线性非齐次方程的一般形状为

$$ay''+by'+cy=f(x) \tag{4.1}$$

其中$a\neq 0$，a、b、c都是实常数，自由项$f(x)$是不恒等于零的已知函数。

我们知道，方程（4.1）的通解等于它的一个特解与对应齐次方程通解的和。由于(4.1)是常系数方程，所以对应齐次方程的通解已经求出，剩下的工作就是如何求出方程(4.1)的一个特解。

当然，我们可用常数变易法求出方程(4.1)的特解，因为它是从理论上给出求非齐次方程特解的一般方法。但是其计算繁琐，又往往会遇到积分上的困难，所以再将待定系数法和拉普拉斯(Laplace)变换法介绍给大家。

1. 待定系数法. 当自由项$f(x)$是由初等函数组成的以下几种类型时，采用简便的待定系数法是比较有效的。

i) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，其中$a_i(i=0,1,\cdots,m)$都是实常数。这时方程(4.1)的形状为

$$ay''+by'+cy=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m, \tag{4.2}$$

对于自由项是多项式的情形，我们可以试求形式为多项式的特解。

当$c\neq 0$时，设特解的次数应与$f(x)$的次数相同。即令

$$\bar{y}=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m, \tag{4.3}$$

这里b_i $(i=0, 1, \cdots, m)$是待定系数。将(4.3)代入方程(4.2)，要使等式成立，必须使等式两端x的同次幂的系数相等；于是就得到一个以b_i $(i=0,1,\cdots,m)$为未知数的代数方程组，

$$\begin{cases} cb_m=a_m, \\ cb_{m-1}+mbb_m=a_{m-1}, \\ \cdots\cdots \\ cb_0+bb_1+2ab_2=a_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

由(4.4)可将b_i $(i=0, 1, \cdots, m)$唯一确定。从而由(4.3)得到所要的特解。

当$c=0$时，则方程(4.2)的形状为

$$ay''+by'=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m. \tag{4.5}$$

对方程(4.5)如果我们还试求形如(4.3)的解，将它代入(4.5)后，就会出现等式的左端是一个$m-1$次多项式，而右端是一个m次多项式的形式。要使等式的左端仍然是一个m次多项式，就必须设特解为$m+1$次多项式。即令

$$\bar{y}=x(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m),$$

然后再代入(4.5)，重复以上做法就可将b_i $(i=0, 1, \cdots, m)$全部

确定出来。

当$b=c=0$时，则方程(4.2)变为

$$ay''=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m, \tag{4.6}$$

这时可直接积分，得

$$\bar{y}=x^2\left(\frac{a_0}{2a}+\frac{a_1}{6a}x+\cdots+\frac{a_m}{(m+1)(m+2)a}x^m\right).$$

例1 求方程$y''+2y'-3y=1+x^2$的一个特解。

解 因为$c=3\neq0$，故设特解形状为

$$\bar{y}=b_0+b_1x+b_2x^2,$$

其中b_0，b_1，b_2是待定系数．代入方程得

$$3b_0+2b_1+2b_2+(3b_1+4b_2)x+3b_2x^2=1+x^2,$$

比较同次幂的系数，得到

$$\begin{cases}3b_2=1,\\3b_1+4b_2=0,\\3b_0+2b_1+2b_2=1;\end{cases}$$

解此方程组，得$b_2=\frac{1}{3}$，$b_1=-\frac{4}{9}$，$b_0=\frac{11}{27}$，从而求得特解为

$$\bar{y}=\frac{11}{27}-\frac{4}{9}x+\frac{1}{3}x^2.$$

ii) $f(x)=e^{\lambda x}(a_0+a_1x+\cdots a_mx^m)$,其中$\lambda$、$a_i$ $(i=0,1,\cdots,m)$ 都是实常数．这时方程(4.1)的形状为

$$ay''+by'+cy=e^{\lambda x}(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m). \tag{4.7}$$

对于方程(4.7)只要作函数代换

$$y=ze^{\lambda x},$$

就可化为i) 的情形．因为$y'=e^{\lambda x}(z'+\lambda z)$, $y''=e^{\lambda x}(z''+2\lambda z'+\lambda^2z)$，然后将$y$，$y'$，$y''$代入方程(4.7)，得到

$$az'' + (2a\lambda + b)z' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)z = a_0 + a_1x + \cdots$$
$$+ a_mx^m. \tag{4.8}$$

若令$a = A$，$2a\lambda + b = B$，$a\lambda^2 + b\lambda + c = C$，这时方程(4.8)就属于1) 中的(4.2)类型；因此，我们有

若λ不是特征方程的根(即$C \neq 0$)，这时方程(4.7)应求形状为

$$\bar{y} = e^{\lambda x}(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$$

的特解；

若λ是特征方程的单根(即$C = 0$)，这时方程(4.7)应求形状为

$$\bar{y} = e^{\lambda x}x(b_0 + b_1x + \cdots b_mx^m)$$

的特解；

若λ是特征方程的重根(即$B = C = 0$)，这时方程(4.7)应求形状为

$$\bar{y} = e^{\lambda x}x^2(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$$

的特解。其中b_i ($i = 0, 1, \cdots, m$)是待定系数。

例2 求方程$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}(1 + x^2)$的一个特解。

解 因为3是特征方程$r^2 - 2r - 3 = 0$的单根，故设特解形状为

$$\bar{y} = e^{3x}x(b_0 + b_1x + b_2x^2),$$

其中b_0，b_1，b_2是待定系数，将它代入方程，利用等式(4.8) 得

$$2b_1 + 4b_0 + (6b_2 + 8b_1)x + 12b_2x^2 = 1 + x^2,$$

比较系数，有

$$\begin{cases} 12b_1 = 1, \\ 6b_2 + 8b_1 = 0, \\ 2b_1 + 4b_0 = 1. \end{cases}$$

求得$b_2 = \frac{1}{12}$，$b_1 = -\frac{1}{16}$，$b_0 = \frac{9}{32}$。从而得到通解为

$$\bar{y}=e^{3x}x\left(\frac{9}{32}-\frac{x}{16}+\frac{1}{12}x\right).$$

iii) $f(x)=e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x$或$e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x$，其中$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$是$m$次多项式，$\alpha$、$\beta$、$a_i$ $(i=0, 1, \cdots, m)$都是实常数。这时方程(4.1)的形状可写为

$$ay''+by'+cy=e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x \tag{4.9$'$}$$

或

$$ay''+by'+cy=e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x \tag{4.9$''$}$$

利用尤拉公式可得

$$\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right),\ \sin\beta x=\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right),$$

因此有

$$f(x)=e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x=\frac{P(x)}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}\right),$$

或

$$f(x)=e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x=\frac{P(x)}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}\right).$$

再根据叠加原理，对右端的每一项应用 ii) 的方法。这里应说明的是，前面的讨论对λ取复数时也是正确的。下面以(4.9)$'$为例，即对方程

$$ay''+by'+cy=\frac{1}{2}P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

和

$$ay''+by'+cy=\frac{1}{2}P(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

分别求出特解$\bar{y}_1$和$\bar{y}_2$，然后将它们相加便得到方程(4.9)$'$的特解

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

其中特解$\bar{y}$和$\bar{y}_2$的设法是

$$\bar{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}x^k P_1(x), \quad \bar{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}x^k P_2(x),$$

式中$P_1(x)$和$P_2(x)$是次数与$P(x)$相同而系数待定的多项式，当$\alpha \pm i\beta$不是特征根时，$k=0$；当$\alpha \pm i\beta$是特征根时，$k=1$，所以方程(4.9)′的特解设法应为

$$\begin{aligned}\bar{y} &= e^{(\alpha+i\beta)x}x^k P_1(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}x^k P_2(x)\\ &= e^{\alpha x}x^k(P_1(x)e^{i\beta x} + P_2(x)e^{-i\beta x})\\ &= e^{\alpha x}x^k(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x),\end{aligned}$$

这里$k=0$或1，取决于$\alpha \pm i\beta$是不是特征根而定；$A(x)$，$B(x)$都是系数待定的次数与$P(x)$相同的多项式。

必须注意：多项式$A(x)$，$B(x)$都是实系数多项式．其理由是多项式$P_1(x)$的系数与多项式$P_2(x)$相应的系数，只要确定出来就一定是共轭的．

还有更一般的情况，即

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x),$$

其中$P(x)$和$Q(x)$是多项式，但次数不一定相同，设m是其中的最高次数，这时特解$\bar{y}$的设法是：

如果$\alpha \pm i\beta$不是特征方程的根，那么就应当求形状为

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

的特解；如果$\alpha \pm i\beta$是特征方程的根，那么就应当求形状为

$$\bar{y} = e^{\alpha x}x(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

的特解，其中$P_m(x)$和$Q_m(x)$都是系数待定的m次多项式．

例3 求方程$y'' + 4y = \cos 2x$的一个特解．

解 因为$\pm 2i$是特征方程的根，故设特解为

$$\bar{y}=x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

其中A、B是待定系数。由于

$$\bar{y}'=(A+2Bx)\cos 2x+(B-2Ax)\sin 2x,$$

$$\bar{y}''=4(B-Ax)\cos 2x-4(A+Bx)\sin 2x$$

将$\bar{y}$，$\bar{y}'$，$\bar{y}''$代入方程。得

$$4B\cos 2x-4A\sin 2x=\cos 2x,$$

比较等式两边$\sin 2x$和$\cos 2x$前面的系数，有

$$4B=1,\quad -4A=0,$$

解出$A=0$，$B=\frac{1}{4}$。故方程的特解为

$$\bar{y}=\frac{x}{4}\sin 2x.$$

例4 求方程$y''-2y'+y=x\cos x+2\sin x$的通解。

解 首先求出对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=(c_1+c_2x)e^x,$$

其次再求方程本身的一个特解，因为$\pm i$不是特征方程的根，所以应求形状为

$$\bar{y}=(A_0+A_1x)\cos x+(B_0+B_1x)\sin x$$

的特解，其中A_0，A_1，B_0，B_1是待定系数。由于

$$\bar{y}'=(B_1x+A_1+B_0)\cos x-(A_1x-B_1+A_0)\sin x,$$

$$\bar{y}''=(-A_1x+2B_1-A_0)\cos x-(B_1x+2A_1+B_0)\sin x,$$

将$\bar{y}$，$\bar{y}'$，$\bar{y}''$代入方程，得

$$2(-B_1x - A_1 + B_1 - B_0)\cos x + 2(A_1x - A_1 - B_1$$
$$+ A_0)\sin x = x\cos x + 2\sin x.$$

要此等式成立，必须使等式两边$\sin x$和$\cos x$前面的系数分别相等，再比较系数，得

$$\begin{cases} -2B_1 = 1, \\ -A_1 + B_1 - B_0 = 0, \\ 2A_1 = 0, \\ -A_1 - B_1 + A_0 = 1, \end{cases}$$

解得$A_1 = 0$，$A_0 = \frac{1}{2}$，$B_1 = -\frac{1}{2}$，$B_0 = -\frac{1}{2}$.故方程的特解为

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(1+x)\sin x.$$

所以原方程的通解为

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(1+x)\sin x.$$

2.拉普拉斯变换. 拉普拉斯变换是广义形式的积分变换，它同数学中其它运算一样，其共同的特点都是作用于一些函数而得出另一些函数。由于这个方法在工程控制理论、电路分析和其它技术领域中有广泛的应用，因此深受从事实际工作的同志欢迎。基于篇幅所限，我们将着重介绍拉普拉斯变换在求解常系数线性方程中的应用.此法的优点,除了把微分方程转化为代数方程外，对求解微分方程的始值问题也要比其它的方法快得多，因为它能把初始条件一起考虑在内，不象通常作法那样，先求通解再求特解。下面我们给出拉普拉斯变换的定义。

定义3 对于在区间$[0, \infty]$上有定义的函数$f(x)$，如果无穷积分

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \tag{4.10}$$

收敛，则称函数$F(s)$为$f(x)$的拉普拉斯变换，简称拉氏变换；通常把它记为

$$\mathscr{L}[f(x)]=F(s) \tag{4.11}$$

我们用记号

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(x) \tag{4.12}$$

表示（4.11）的逆变换．在拉氏变换中，参变量s一般为复数．但在本教程中只限于它为实数就足够用了．

通过直接计算，下面几个函数的拉氏变换是容易得出的

（1）$f(x)=c$，c为常数．

$$\mathscr{L}[c]=\int_0^\infty e^{-sx}c\,dx=\frac{c}{s} \qquad (s>0);$$

（2）$f(x)=e^{ax}$，a为常数．

$$\mathscr{L}[e^{ax}]=\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx=\int_0^\infty e^{-(s-a)x}dx=\frac{1}{s-a} \qquad (s>a);$$

（3）$f(x)=x^2$．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x^2]&=\int_0^\infty e^{-sx}x^2dx=-\frac{x^2e^{-sx}}{s}\bigg|_0^\infty+\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-sx}x\,dx\\&=\frac{2}{s}\mathscr{L}[x]=\frac{2}{s}\left(-\frac{xe^{-sx}}{s}\right)\bigg|_0^\infty+\frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-sx}dx\\&=\frac{2}{s^3} \qquad (s>0);\end{aligned}$$

（4）$f(x)=\sin\omega x$，$\omega>0$．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin\omega x]&=\int_0^\infty e^{-sx}\sin\omega x\,dx\\&=-\frac{\sin\omega x}{s}e^{-sx}\bigg|_0^\infty+\frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cos\omega x\,dx\\&=\frac{\omega}{s}\mathscr{L}[\cos\omega x]\end{aligned}$$

$$=\frac{\omega}{s}\left(-\frac{\cos\omega x}{s}e^{-sx}\right)\Big|_0^{\infty}-\frac{\omega^2}{s^2}\int_0^{\infty}e^{-sx}\sin\omega x dx$$

$$=\frac{\omega}{s^2}-\frac{\omega^2}{s^2}\mathscr{L}[\sin\omega x]$$

由此可以推出

$$\mathscr{L}[\sin\omega x]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad(s>0);$$

(5) $f(x)=\cos\omega x$，$\omega>0$。

$$\mathscr{L}[\cos\omega x]=\frac{s}{\omega}\mathscr{L}[\sin\omega x]$$

$$=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad(s>0).$$

对于函数$f(x)$，要保证拉氏变换$\mathscr{L}[f(x)]$存在，一般说来是要附加条件的，譬如，我们总假定$f(x)$为指数级函数。就是说存在着这样的常数$a>0$，$M>0$，使得不等式

$$|f(x)|\leqslant Me^{ax}\tag{4.13}$$

当$x\geqslant c(c>0)$时成立。这样在满足不等式(4.13)的前提下，即使$f(x)$变为无穷大(当$x\to\infty$时)，它的递增程度还是慢于某个指数函数的常数倍。

容易看出，上面几个例子都是指数级函数；而且任何有界函数也都是指数级的。另一方面，函数e^{x^2}就不具有指数级。关于指数级函数，它们的拉氏变换是存在的。

定理3.12 设函数$f(x)$在$[0,\infty]$上分段连续且具有指数级，则它的拉氏变换当$s>0$时存在。

证明 我们只要证明无穷积分

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

当($s>a$)时是收敛的．为此，有

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)ds=\int_0^c e^{-sx}f(x)dx+\int_c^\infty e^{-sx}f(x)dx.$$

由于$f(x)$分段连续，故右端第一项积分存在；关于第二项，利用不等式(4.13)，推得

$$\left|\int_c^\infty e^{-sx}f(x)dx\right|\leqslant\int_c^\infty |e^{-sx}f(x)|\,dx\leqslant M\int_c^\infty e^{-(s-a)x}dx$$

当$s>a$时，积分

$$\int_c^\infty e^{-(s-a)x}dx$$

收敛，从而无穷积分

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

是收敛的，故定理得到证明。

需要指出的是，拉氏变换是线性的．就是说，两个函数的任一线性组合的拉氏变换等于其各自拉氏变换的同一线性组合。事实上，由定义 3 可直接推出

$$\mathscr{L}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\mathscr{L}[f(x)]+\beta\mathscr{L}[g(x)], \quad (4.14)$$

其中α，β是任意常数。

定理3.13 设函数$f(x)$在$[0, \infty]$上的拉氏变换存在，并且导函数$f'(x)$是分段连续的．则当$s>a$时，有

$$\mathscr{L}[f'(x)]=s\mathscr{L}[f(x)]-f(0). \quad (4.15)$$

证明 考虑无穷积分

$$\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx,$$

因为$f'(x)$是分段连续的，故由分部积分，得

$$\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx=e^{-sx}f(x)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

$$=-f(0)+s\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx.$$

已知$f(x)$的拉氏变换存在，所以导函数$f'(x)$的拉氏变换存在，从而公式(4.15)成立。

这个定理在适当条件下可以推广到一般的情形。即

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(x)]=s^n\mathscr{L}[f(x)]-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}f^{(i-1)}(0).$$

当$n=2$时，即得

$$\mathscr{L}[f''(x)]=s^2\mathscr{L}[f(x)]-sf(0)-f'(0).$$

例5 已知函数$f(x)$的拉氏变换为$F(s)$，求函数

$\varphi(x)=\int_0^x f(\tau)d\tau$的拉氏变换。

解 因为$\varphi'(x)=f(x)$，$\varphi(0)=0$，这里对$\varphi(x)$应用公式(4.15)，有

$$\mathscr{L}[\varphi'(x)]=s\mathscr{L}[\varphi(x)]-\varphi(0),$$

于是得到

$$F(s)=s\mathscr{L}\left[\int_0^x f(\tau)d\tau\right].$$

即

$$\mathscr{L}\left[\int_0^x f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}.$$

例6 若$F(s)$是函数$f(x)$的拉氏变换，试求函数 $e^{ax}f(x)$ 的拉氏变换。

解 因为

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}e^{ax}f(x)dx=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)x}f(x)dx,$$

而当$s>a$时，有

$$\int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} f(x)dx = F(s-a).$$

从而得到

$$\mathscr{L}[e^{ax}f(x)] = F(s-a).$$

例7 求始值问题

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

的解.

解 用拉氏变换作用于方程的两边

$$\mathscr{L}[y''] - 3\mathscr{L}[y]' + 2\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{3x}],$$

于是有

$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 3(s\mathscr{L}[y] - y(0)) + 2\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s-2},$$

代入始值条件，并利用部分分式，得

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2(s-3)},$$

再用拉氏逆变换，得到

$$y = \frac{1}{2}e^{x} - e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

例8 求始值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y = 0, \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解.

解 用拉氏变换作用于方程的两边,

$$\mathscr{L}[y''] + 2\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[0],$$

利用前面的公式，得到

$$s^2\mathscr{L}[y]-sy(0)-y'(0)+2\mathscr{L}[y]=0,$$

代入初始条件

$$\mathscr{L}[y]=\frac{5s+1}{s^2+2}=\frac{5s}{s^2+2}+\frac{1}{s^2+2},$$

再用拉氏逆变换得

$$y=5\cos\sqrt{2}\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,x.$$

拉　氏　变　换　表

$f(x)$	$F(s)$	$f(x)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$e^{ax}\cos\omega x$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
c	$\frac{c}{s}$	$x\sin\omega x$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
x	$\frac{1}{s^2}$	$x\cos\omega x$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^3}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{s\ [\text{illegible}]\ a}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$\sin\omega x$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_0^x f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\cos\omega x$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$e^{ax}f(x)$	$F(s-a)$
$\mathrm{sh}\,\omega x$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$f(cx)\quad(c>0)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
$\mathrm{ch}\,\omega x$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$f(x-a)\quad(a>0)$	$e^{-sa}F(s)$
$e^{ax}\sin\omega x$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_0^\infty F(s)ds$

通过上面两例可以看出，拉氏变换所要求的条件自然具备，说明了用拉氏变换求解微分方程的合理性。值得注意的是，最后要得出解来还需用拉氏逆变换，虽然这只是个查表问题；但仍须指出，拉氏逆变换是唯一的。并且利用这一结论还可以推出，拉氏逆变换也是线性的。

关于拉氏逆变换的唯一性证明，需要用到复变函数的知识，有兴趣的读者可参阅赵访熊著：《高等微积分》第十章。

为了便于读者，现把常用的拉氏变换列表(见P.104表)。

3.弹簧振动问题. 设弹簧的长度为l，将一质量为m的物体放置在弹簧上，这时弹簧受到了压力缩短长度δ_0，物体处于平衡位置O(图3—1)。若有一周期性外力$f(t)=mP\sin\omega t$沿垂直方向作用在物体上，使其离开平衡位置的距离为l_0，这时物体就会在平衡位置上下振动。我们来研究它的振动规律。

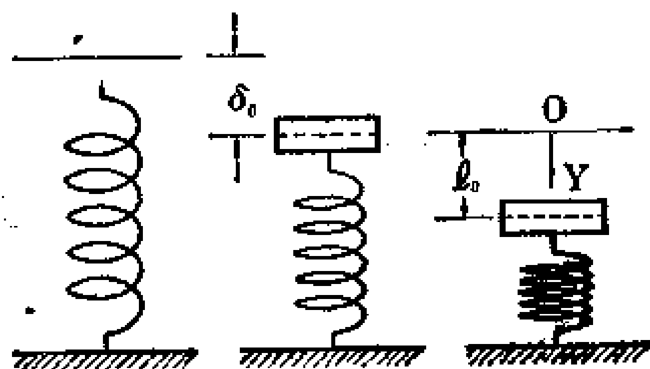


图3—1

1) 列方程和初始条件. 选取平衡位置O为坐标原点，垂直向下的方向为y轴正向。很明显，物体在未受到外力作用时，作用于它的力只有弹簧本身的重力Q和弹力F_1。而物体受到外力作用时，由于上下振动还会受到周围介质的阻力R。于是根据牛顿第二运动定律

$$ma=F,$$

得到

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=f(t)+Q+F_1+R.$$

下面我们分别定出R，F_1和Q：介质的阻力，一般与运动速度成正比，其方向与运动方向相反，因而有

$$R=-k\frac{dy}{dt},$$

其中$k>0$是阻尼系数；根据虎克(Hooke)定律有

$$F_1=-k_1(\delta_0+y),$$

其中$k_1>0$是弹性系数，又由于$k_1\delta_0=Q$。于是得到方程

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=f(t)-k_1y-k\frac{dy}{dt},$$

或写成

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+\mu^2y=P\sin\omega t \qquad (4.16)$$

其中$\frac{k}{m}=2b$，$\frac{k_1}{m}=\mu^2$。这就是在外力作用下弹簧强迫振动的微分方程。

若物体在离开平衡位置到 t_0 处的瞬时，将外力取消（$f(t)=0$），就得到对应于(4.16)的齐次方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+\mu^2y=0, \qquad (4.17)$$

这时称方程(4.17)为弹簧阻尼振动的微分方程。

若再略去介质阻力项$2b\frac{dy}{dt}$，这时方程(4.17)变为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mu^2y=0, \qquad (4.18)$$

则称方程(4.18)为弹簧自由振动的微分方程。

至于弹簧振动的初始条件，可根据弹簧振动的初始状态得出，

$$y|_{t=0}=l_0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0 \tag{4.19}$$

ii) 求解，首先考虑自由振动。即求方程(4.18)的解。由于它是常系数线性齐次方程，故通解为

$$y=c_1\cos\mu t+c_2\sin\mu t.$$

若令$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$，从而有$c_1=A\sin\varphi$，$c_2=A\cos\varphi$，则

$$\begin{aligned}y&=A(\sin\varphi\cos\mu t+\cos\varphi\sin\mu t)\\&=A\sin(\mu t+\varphi),\end{aligned} \tag{4.20}$$

这里A、φ是任意常数。

很明显，(4.20)是一个以$\frac{2\pi}{\mu}$为周期的周期函数，它描述了物体的周期振动，或称简谐振动(图3—2)；最大振幅A是物体的最大位移，μ是振动的圆频率，φ是初相角。

其次考虑阻尼振动。即求方程

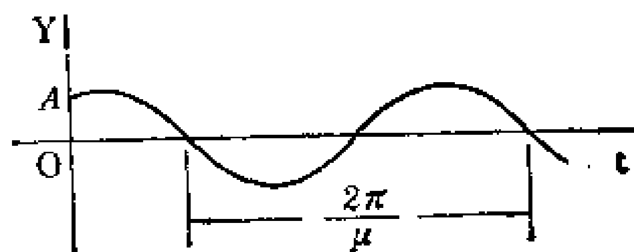


图3—2

$$y''+2by'+\mu^2y=0$$

的解，此时它的两个特征根为

$$r_1=-b+\sqrt{b^2-\mu^2},\qquad r_2=-b-\sqrt{b^2-\mu^2},$$

当$b>\mu$时，r_1与r_2是两个不相等的实根，于是方程(4.17)的

通解为

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t},$$

由于 $b>\mu>0$，所以r_1，r_2都是负数。因此，当$t\to\infty$时，解$y(t)\to0$，如图3—3，它表明弹簧振动过程中的阻力很大；当$b=\mu$时，$r_1=r_2$是重根，

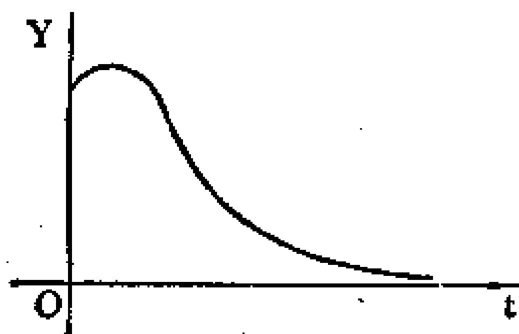


图3—3



图3—4

于是方程(4.17)的通解为

$$y=(c_1+c_2t)e^{-bt},$$

这时弹簧振动的情况与$b>\mu$类似(图3—4)；当 $b<\mu$时，r_1与r_2是一对共轭的复根，于是方程(4.17)的通解为

$$y=e^{-bt}(c_1\cos\sqrt{\mu^2-b^2}\,t+c_2\sin\sqrt{\mu^2-b^2}\,t),$$

即

$$y=Ae^{-bt}\sin(\sqrt{\mu^2-b^2}\,t+\varphi),$$

这里$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$，$c_1=A\sin\varphi, c_2=A\cos\varphi$，由于振幅$Ae^{-bt}$随着$t$增大而减小，因此，当 $t\to\infty$ 时，解 $y(t)\to0$，但它仍是以$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2-b^2}}$为周期的周期函数，如图3—5所示。

最后考虑强迫振动，我们知道，这时通解形式为

$$y=Y+\bar{y},$$

其中Y 是对应齐次方程的通解，$\bar{y}$ 是非齐次方程自身的一个特解。

下面分两种情形来讨论。对于无介质阻力的情形，此时方程为

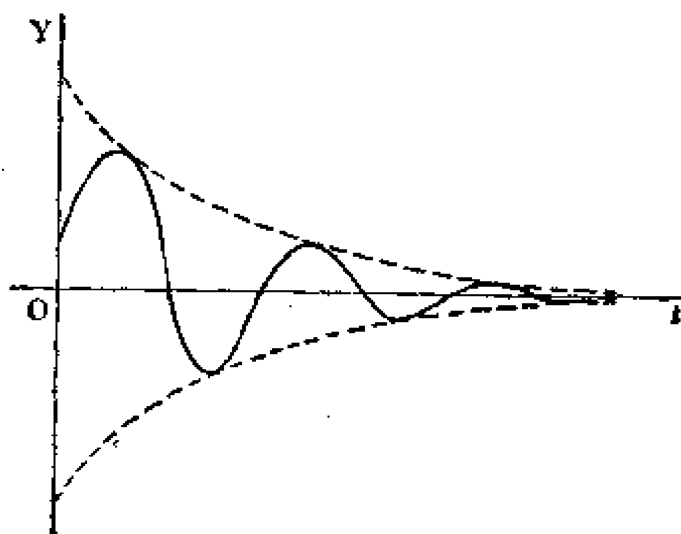


图3—5

$$y'' + \mu y = P\sin\omega t. \tag{4.21}$$

对应齐次方程的通解已求出，是

$$Y(t) = A\sin(\mu t + \varphi)$$

利用待定系数法可求出方程(4.21)的一个特解是

$$\bar{y} = \frac{P}{\mu^2 - \omega^2}\sin\omega t,$$

于是方程(4.21)的通解为

$$y = A\sin(\mu t + \varphi) + \frac{P}{\mu^2 - \omega^2}\sin\omega t.$$

这是两个不同频率的量之合成，第一部分是简谐振动，第二部分是与干扰外力周期相同的简谐振动，容易看出，当外力的频率 ω 趋向于固有频率μ时，振幅$\frac{P}{\mu^2 - \omega^2}$将趋向于无穷(图3—6)，因此，

解$y(t)$也趋向于无穷。这种现象在工程上称为共振。

对于有介质阻力的情形，此时方程为

$$y''+2by'+\mu^2y=P\sin\omega t. \tag{4.22}$$

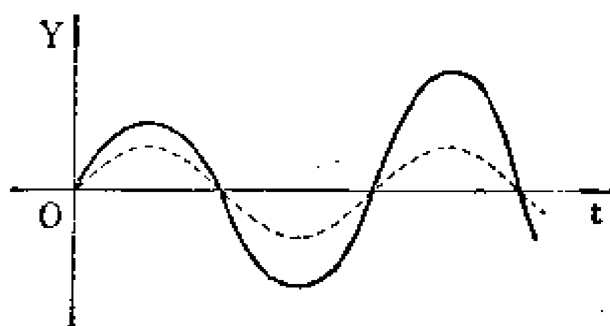


图3—6

利用待定系数法可求得它的一个特解为

$$\bar{y}=\frac{P}{\sqrt{(\mu^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi)$$

其中$\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{-2b\omega}{\mu^2-\omega^2}$。而对应齐次方程的通解已求出，为

$$Y(t)=\begin{cases}c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} & (b>\mu),\\(c_1+c_2t)e^{-bt} & (b=\mu);\\Ae^{-bt}\sin(\sqrt{\mu^2-b^2}t+\varphi) & (b<\mu).\end{cases}$$

根据上面的讨论可知，当t递增时，不论哪种情况$Y(t)$都递减，因此，方程(4.22)的通解$y=Y+\bar{y}$，(当$t\to\infty$时)所代表的弹簧振动主要由第二部分$\bar{y}$来决定。但从$\bar{y}$的表达式可以看出，它是与外力同周期的简谐振动，其振幅是

$$A_1=\frac{P}{\sqrt{(\mu^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}$$

当b很小时，若ω越接近于μ，则A_1就不断增大，就是说在介质阻力很小的情况下，当外力的频率与固有频率一致时也会产生共振，

§5 幂级数解

二阶线性方程的求解问题，归结为寻求线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{5.1}$$

的两个线性无关特解，但特解只对常系数或可化为常系数的这类特殊方程才可找到。对于稍微复杂的情况可用本节介绍的幂级数法去求特解。幂级数解法是一个强有力的工具，它在解决方程(5.1)的积分之同时又给出了一类新的函数，这些函数常常是非初等的，它们在生产实际中有很多应用。

1. 常点. 当我们考虑二阶线性齐次方程(5.1)的求解问题时，首先要弄清楚它的解在一点x_0附近的性态。显然这与系数$p(x)$和$q(x)$在该点的性态有关。

一个函数$f(x)$，如果在点x_0的某邻域内能展成泰勒(Taylor)级数(即幂级数)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

则称它在x_0处是解析的。这里$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

对于方程(5.1)，如果它的系数$p(x)$及$q(x)$在某点处是解析的，则称该点为方程(5.1)的常点。而且方程(5.1)的解在常点处也是解析的。凡不是常点的点，就叫做方程(5.1)的奇点。

下面以一个例子来说明幂级数解法确实行之有效。为此，考虑方程

$$y''-y=0, \tag{5.2}$$

这里$p(x)=0$，$q(x)=1$，显然这两个函数在$x_0=0$处是解析的，故

我们可求形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{5.3}$$

的幂级数解。对(5.3)求导。

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

若将y，y'，y''代入方程(5.2)，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_n]x^n=0$$

再使同次幂系数等于零，于是有

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_n=0,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

从而得到

$$a_2=\frac{a_0}{2},\quad a_3=\frac{a_1}{2\cdot 3},\quad a_4=\frac{a_2}{3\cdot 4}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4},$$

$$a_5=\frac{a_3}{4\cdot 5}=\frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\quad \cdots.$$

可见对$n\geqslant 2$以后所有a_n，都可因 n 是奇、偶数的不同而分别由a_1或a_0表示。这样将求出的$a_n(n=2,3,\cdots)$代入(5.3)式，整理后得

$$\begin{aligned} y=&a_0\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\\ &+a_1\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

这里a_0，a_1是任意常数，如果(5.4)中括号内的两个函数级数收敛

且线性无关，那么(5.4)就是方程(5.2)的通解。为了便于比较，我们令$a_0=\bar{a}_0+\bar{a}_1$，$a_1=\bar{a}_0-\bar{a}_1$，于是(5.4)变为

$$y=\bar{a}_0\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)+\bar{a}_1\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\right)$$

$$=\bar{a}_0y_1+\bar{a}_1y_2. \tag{5.5}$$

不难看出，括号内的两个级数对任何x都是收敛的，且$y_1=e^x$，$y_2=e^{-x}$。故(5.5)就是方程(5.2)的真正解，即

$$y=\bar{a}_0e^x+\bar{a}_1e^{-x}.$$

由于(5.2)是一个很简单的方程，而且它的解早已为我们所熟悉，所以这种巧合也是我们期望的。但对一般的系数，即使幂级数解收敛，也不易看出它所收敛的函数。

例1 求始值问题

$$\begin{cases}y''+3xy'+3y=0,\\ y(0)=2, y'(0)=3\end{cases}$$

在$x_0=0$邻域的幂级数解。

解 这里$p(x)=3x$，$q(x)=3$，因此$x_0=0$是个常点。我们试求形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

的幂级数解，由于

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

若将y，y'，y''代入方程，得到

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+3na_n+3a_n]x^n=0.$$

再使同次幂的系数等于零，于是得到

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+3(n+1)a_n=0 \qquad (n=0,1,\cdots)$$

或

$$a_{n+2}=-\frac{3a_n}{n+2}. \qquad (n=0,1,\cdots)$$

若选取a_0，a_1为任意常数，从而有

$$a_2=-\frac{3a_0}{2},\ \ a_3=-\frac{3a_1}{3}, a_4=-\frac{3a_2}{4}=\frac{(-1)^2\cdot 3^2a_0}{2\cdot 4},$$

$$a_5=-\frac{3a_3}{5}=\frac{(-1)^2\cdot 3^2a_1}{3\cdot 5},\ \ \cdots.$$

代入解式中得

$$y=a_0\left(1-\frac{3x^2}{2}+\frac{3^2x^4}{2\cdot 4}-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{3x^3}{3}+\frac{3^2x^5}{3\cdot 5}-\cdots\right)$$

$$=a_0y_1+a_1y_2$$

其中$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3^kx^{2k}}{2^kk!}$，$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3^k2^kk!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$，显然，$y_1$和$y_2$对所有$x$都收敛。由于 $y_1(0)=1$，$y_1'(0)=0$，$y_2(0)=0$，$y_2'(0)=1$。所以朗斯基行列式

$$W(0)=\begin{vmatrix}y_1(0) & y_2(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0)\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

从而$y_1(x)$，$y_2(x)$是方程的一个基本解组，这样一来，方程的通解就可写为

$$y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x).$$

再由初始条件$y(0)=2$，$y'(0)=3$，求出$a_0=2$，$a_1=3$，因此始值问题的解为

$$y(x)=2y_1(x)+3y_2(x).$$

这个例题说明，在一般情况下幂级数解法是可行的。

定理3.14 设x_0是方程(5.1)的常点，且系数$p(x)$，$q(x)$都能在区间$|x-x_0|<R(>0)$上展成幂级数，则始值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, & (5.1) \\ y(0)=\alpha, \quad y'(0)=\beta & (5.6) \end{cases}$$

在$|x-x_0|<R$上存在唯一的级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

(这里α和β是实常数)。

证明 无妨设$x_0=0$，于是$p(x)$和$q(x)$在原点的某邻域内可展为幂级数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \text{和} q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n, \tag{5.7}$$

(5.7)的收敛区间为$|x|<R$。今设幂级数解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{5.8}$$

并使其收敛半径不小于R。求导得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

将y、y'、y''代入方程(5.1)，得到

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+p(x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+$$

$$+q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{5.9}$$

利用幂级数的乘法规则，得出

$$p(x)y' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n}(k-1)p_{n-k}a_{k-1}\quad\Big]x^n,$$

$$q(x)y = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\Big]x^n.$$

于是(5.9)可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)\ a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)p_{n-k}a_{k+1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k]x^n = 0$$

由此得到关于a_n的递推公式：

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)p_{n-k}a_{k+1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k = 0 \tag{5.10}$$

当$n=0,1,2,\cdots$时，即有

$$2a_2 = -(p_0a_1 + q_0a_0),$$

$$2\cdot 3a_3 = -(p_1a_1 + 2p_0a_2 + q_1a_0 + q_0a_1),$$

$$3\cdot 4a_4 = -(p_2a_1 + 2p_1a_2 + 3p_0a_3 + q_2a_0 + q_1a_1 + q_0a_2).$$

$$\cdots\cdots$$

这样就把a_2，a_3，……用a_0及a_1唯一表示出来。从而幂级数(5.8)就由(5.10)完全确定了。

现在我们来证明级数(5.8)在同一区间$|x|<R$上收敛。由于级数(5.7)在区间$|x|<R$上收敛，因此对于适合$r<R$的正数r，当$x=r$时收敛级数的项趋于零，故存在一个常数$M>0$，使得不等式

$$|p_n|r^n\leqslant M \text{和} |q_n|r^n\leqslant M$$

对一切n都成立。我们应用这两个不等式于递推公式(5.10)，得到

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leqslant \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k \\ &\leqslant \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k \\ &\quad +M|a_{n+1}|r.\end{aligned}$$

今取$A_0=|a_0|$、$A_1=|a_1|$，并且定义A_{n+2}当$n\geqslant 0$时为

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)A_{n+2} = &\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)A_{k+1}+A_k]r^k \\ &+MA_{n+1}r.\end{aligned} \tag{5.11}$$

显然，对于每一个n都有

$$0\leqslant|a_n|\leqslant A_n.$$

下面考察级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n \tag{5.12}$$

的收敛性。由(5.11)知

$$n(n+1)A_{n+1}=\frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)A_{k+1}+A_k]r^k+MA_nr$$

$$(n-1)nA_n=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)A_{k+1}+A_k]r^k+MA_{n-1}r,$$

用r乘以第一式再利用第二式，得

$$rn(n+1)A_{n+1}=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)A_{k+1}+A_k]r^k+MA_nr^2$$

$$+rM(nA_n+A_{n-1})$$

$$=(n-1)nA_n-MA_{n-1}r+MA_nr^2+rM(nA_n+A_{n-1})$$

$$=[(n-1)n+Mnr+Mr^2]A_n,$$

于是有

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{(n-1)n+Mnr+Mr^2}{rn(n+1)}.$$

现在我们作比值

$$\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_nx^n}\right|=\frac{A_{n+1}}{A_n}|x|,$$

当$n\to\infty$时，$\frac{A_{n+1}}{A_n}|x|\to\frac{|x|}{r}$，这说明级数(5.12)当$|x|<r$时收敛。从而推知级数(5.8)当$|x|<r$时收敛，而$r$是小于$R$的任一正数，所以当$|x|<R$时级数(5.8)收敛。

最后利用初始条件(5.6)，将任意常数a_0和a_1唯一确定后就得到始值问题(5.1)，(5.6)的唯一解。

例2 在点$x=2$附近，求方程

$$y''+(x-2)^2y'-7(x-2)y=0$$

的通解。

解 这里$x_0=2$，作变换$t=x-2$，则方程变为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+t^2\frac{dy}{dt}-7ty=0,$$

对此方程设幂级数解为

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

将它代入方程，得

$$2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+3)a_{n+3}+(n-7)a_n]t^{n+1}=0,$$

从而得到递推公式

$$a_2=0, \quad (n+2)(n+3)a_{n+3}+(n-7)a_n=0.$$

当$n=0$，1，…时，有

$$a_2=0, \quad a_3=\frac{7}{2\cdot 3}a_0, \quad a_4=\frac{6}{3\cdot 4}a_1,$$

$$a_5=\frac{5}{4\cdot 5}a_2=0, \quad a_6=\frac{4}{5\cdot 6}a_3=\frac{4\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}a_0,$$

$$a_7=\frac{3}{6\cdot 7}a_4=\frac{3\cdot 6}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}a_1, \quad \cdots$$

于是得到形式解为

$$y(t)=a_0\left(1+\frac{7}{2\cdot 3}t^3+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}t^6+\cdots\right)$$

$$+a_1\left(t+\frac{6}{3\cdot 4}t^4+\frac{3\cdot 6}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}t^7\right).$$

$$=a_0y_1+a_1y_2$$

显然$y_1(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}28}{3^k\cdot k!(3k-7)(3k-4)(3k-1)}t^{3k}$是收敛的，$y_2(x)=t+\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{28}t^7$是个多项式。由于$y_1(0)=1$，$y_1'(0)=0$；$y_2(0)=0$，$y_2'(0)=1$。推得$W(0)=1$（$\neq 0$），所以$y_1(t)$，$y_2(t)$是线性无关的。从而得到通解为

$$y(t)=a_0y_1(t)+a_1y_2(t).$$

对于原方程来说，它的通解自然是

$$y(x)=a_0y_1(x-2)+a_1y_2(x-2).$$

勒让德 (Legendre) 方程．勒让德方程的形状为

$$(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0 \tag{5.13}$$

其中ν是实常数。

现在我们来研究方程 (5.13) 的求解问题，先将方程(5.13)改写成

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}y=0 \tag{5.14}$$

显然$x=0$是勒让德方程的一个常点．由于系数

$$p(x)=\frac{-2x}{1-x^2},\qquad q(x)=\frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}$$

的幂级数展开式当$|x|<1$时收敛，根据定理3.14，在区间$|x|<1$上可求方程(5.14)的幂级数解．设解的形式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

为了便于代入方程，先将方程(5.13)的导数项计算如下：

$$-2xy'=\sum_{n=0}^{\infty}-2na_nx^n,$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,$$

$$-x^2y''=\sum_{n=0}^{\infty}-(n-1)na_nx^n,$$

然后代入(5.13)，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+(\nu-n)(\nu+n+1)a_n]x^n=0.$$

于是对一切 n 得到递推公式

$$(n+1)(n+n)a_{n+2}+(\nu-n)(\nu+n+1)a_n=0,$$

即

$$a_{n+2}=-\frac{(\nu-n)(\nu+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n, \tag{5.15}$$

当$n=0$, 1, 2, …时, 有

$$a_2=-\frac{\nu(\nu+1)}{2}a_0, \qquad a_3=-\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2\cdot 3}a_1,$$

$$a_4=-\frac{(\nu-2)(\nu+3)}{3\cdot 4}a_2=\frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}a_0,$$

$$a_5=-\frac{(\nu-3)(\nu+4)}{4\cdot 5}a_3=\frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!}a_1,$$

$$\cdots\cdots.$$

将求得的系数代入所设的解中，得形式解为

$$\begin{aligned}y=&a_0\left(1-\frac{\nu(\nu+1)}{2!}x^2+\frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}x^4+\cdots\right)\\&+a_1\left(x-\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}x^3+\right.\\&\left.+\frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!}x^5-\cdots\right)\\=&a_0y_1+a_1y_2.\end{aligned} \tag{5.16}$$

当ν不是整数时，(5.16) 中括号里边的两个幂级数都收敛，而且收敛半径$R=1$。从而说明前面运算的合理性. 这样不论常数 a_0，a_1取什么值,(5,16)都是方程 (5.13) 的真正解。若令$c_0=1$，$c_1=0$，则得

$$y_1 = 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!}x^2 + \cdots,$$

若令$c_0=0$，$c_1=1$，则得

$$y_2 = x - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

显然，y_1和y_2这两个特解是方程(5.13)的一个基本解组。从而证得(5.16)是方程(5.13)的通解。

我们把(5.16)所定义的函数称为勒让德函数。当ν是非负整数时，两个线性无关解中有一个是多项式，而另一个仍是无穷级数。即当$\nu=n$时，出现

$$a_{n+2} = -\frac{(\nu-n)(\nu+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0,$$

从而有

$$a_{n+4} = a_{n+6} = \cdots = a_{n+2k} = \cdots = 0,$$

于是当n是偶数时y_1是一个n次多项式；当n是奇数则y_2是一个n次多项式。我们称这个多项式为勒让德多项式。通常以$P_n(x)$记之。

关于勒让德多项式$P_n(x)$，我们已经证明它是方程(5.13)的一个解，对于任意的非零常数c，当然$cP_n(x)$也是方程(5.13)的解．为了使$P_n(x)$的形式简洁，我们乘以适当的常数因子，使得$P_n(1)=1$，为此，选择$c=a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$。由公式(5.15)中把$n$换成$k-2$，得

$$a_k = -\frac{(\nu-k+2)(\nu+k-1)}{(k-1)k}a_{k-2},$$

或写成

$$a_{k-2} = -\frac{(k-1)k}{(\nu-k+2)(\nu+k-1)}a_k.$$

再令$\nu=k$，得到

$$a_{k-2}=-\frac{(k-1)k}{2(2k-1)}a_k.$$

当$k=n$，$n-2$，$n-4$，…时，得

$$a_{n-2}=-\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n,$$

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}a_n,$$

……

因为取$a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，则系数为

$$a_{n-2}=-\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}\cdot\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!},$$

$$a_{n-4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\cdot\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

$$=\frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!},$$

……

$$a_{n-2k}=(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}.$$

于是多项式$P_n(x)$的表达式就可写成

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.\quad(5.17)$$

这里当n是偶数时，$N=\dfrac{n}{2}$；当n是奇数时，$N=\dfrac{n-1}{2}$.

根据公式(5.17)，可以直接写出$n=0$，1，2,3的勒让德多项式(图3—7)。

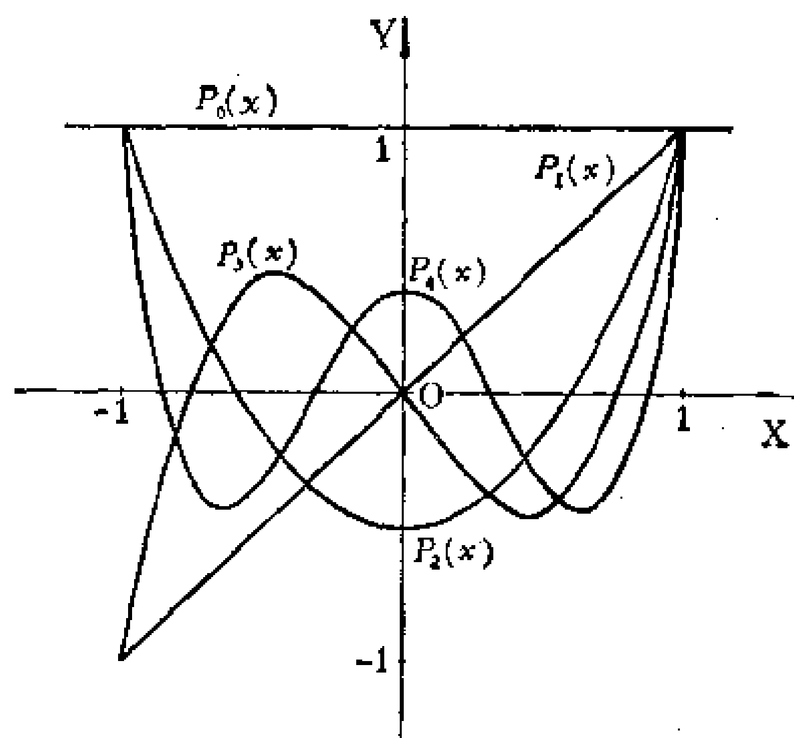


图3—7

$$P_0(x)=1, \qquad P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

可以明显地看出

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x).$$

因此，$P_0(x)$，$P_2(x)$，……都是偶 函 数；$P_1(x)$，$P_3(x)$，…都是奇函数．勒让德多项式还有一些特性，它在数学物理上有许多重要的应用。

2.正则奇点。关于方程(5.1)：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的奇点概念，我们已经给出．即奇点就是系数$p(x)$或$q(x)$的非解

析点。如果$x=x_0$是方程（5.1）的奇点，那么以定理3.14为基础的解法就不能用。但是很多实际问题都要求弄清楚解在这些奇点附近的性质。富有启发性的例子是尤拉方程

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0.$$

$x=0$是它的唯一奇点，但它有两个线性无关解$y_1=x$，$y_2=x^2$，就是说尤拉方程虽然不满足定理3.14的条件，它却有幂级数解，甚至是多项式。还有上段讨论的勒让德方程

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}y=0,$$

它的幂级数解在奇点$x=\pm 1$处都是发散的。但多项式解在$x=\pm 1$却是有意义的。这正是它在数学物理方程中有重要应用之处的原因。

这两个例子说明，奇点并不都相同。其中有一部分是"好"奇点，即方程(5.1)的系数$p(x)$和$q(x)$在这部分奇点处的非解析性较弱。对于这类奇点，我们给出如下定义：

定义4 对于方程(5.1)的奇点x_0，如果函数$(x-x_0)p(x)$及$(x-x_0)^2q(x)$在x_0处是解析的，则称x_0为方程(5.1)的正则奇点。否则为非正则奇点。

按照这个定义，不难看出尤拉方程和勒让德方程的奇点都是正则的。

对于具有正则奇点的方程，只要对幂级数解稍加修正就行了。即求形如

$$y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad (a_0\neq 0) \tag{5.18}$$

的所谓广义幂级数解，这里x_0是方程的正则奇点。

下面先看一个例题。

例3 求方程

$$4xy'' + 3y' - 3y = 0$$

的广义幂级数解。

解 将方程改写成(5.1)的形式

$$y'' + \frac{3}{4x}y' - \frac{3}{4x}y = 0,$$

这里$x_0 = 0$是方程的奇点，但由于

$$xp(x) = \frac{3}{4}, \qquad x^2q(x) = -\frac{3}{4}x$$

在$x_0 = 0$处是解析的，因此$x_0 = 0$是正则奇点。

我们考虑形如(5.18)的解，设

$$y = x^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (a_0 \neq 0).$$

于是有

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2},$$

将y，y'，y''代入原方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+s)a_n x^{n+s-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+s} = 0$$

或写成

$$a_0[4(s-1)s+3s]x^{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+s)(n+s+1)a_{n+1}$$

$$+3(n+s+1)a_{n+1}-3a_n]x^{n+s}=0.$$

令各项系数等于零，得递推公式：

$$a_0[4(s-1)s+3s]=0,$$

$$[4(n+s)(n+s+1)+3(n+s+1)]a_{n+1}-3a_n=0,$$

$$(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

因为$a_0\neq 0$，故得二次方程

$$4s^2-s=0,$$

通常称它为指数方程．它的根

$$s_1=0,\qquad s_2=\frac{1}{4},$$

叫做微分方程在正则奇点$x_0=0$处的指数。

对于$s=s_1=0$的情形，由递推公式得

$$a_{n+1}=\frac{3}{(n+1)(4n+3)}a_n,$$

当$n=0$，1，2，…时，得到

$$a_1=\frac{3}{3}a_0,\qquad a_2=\frac{3}{2\cdot 7}a_1=\frac{3^2}{2\cdot 3\cdot 7}a_0,$$

$$a_3=\frac{3}{3\cdot 11}a_2=\frac{3^3}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 11}a_0,\ \cdots$$

$$a_k=\frac{3^k}{k!\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdots(4k-1)}a_0,\ \cdots.$$

代入$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，就得到原方程的一个形式解

$$y_1=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-1)}x^n\right].$$

其中a_0是不为零的任意常数，一般取$a_0=1$，易知此级数对一切x都收敛，因此它是方程的真正解。

对于$s=s_2=\frac{1}{4}$的情形，由递推公式得

$$a_{n+1}=\frac{3}{(n+1)(4n+5)}a_n,$$

当$n=0$，1，2，…时，求得

$$a_1=\frac{3}{5}a_0,\qquad a_2=\frac{3}{2\cdot 9}a_1=\frac{3^2}{2\cdot 5\cdot 9}a_0,$$

$$a_3=\frac{3^3}{3!5\cdot 9\cdot 13}a_0,\ \cdots$$

$$a_k=\frac{3^k}{k!\cdot 5\cdot 9\cdots(4k+1)}a_0,\ \cdots.$$

代入$y=x^{\frac{1}{4}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$中，就得到了方程的另一个形式解。

$$y_2=a_0\left[x^{\frac{1}{4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-1)}x^{n+\frac{1}{4}}\right].$$

这里也取$a_0=1$，显然y_2对一切x都收敛。因而是真正解。

由于y_1、y_2是两个线性无关解，从而通解为

$$y=c_1y_1+c_2y_2.$$

通过这个例子可知，对于带有正则奇点的微分方程，在其正则奇点的邻域内可用广义幂级数求解。我们将这个事实写成确切的定理形式：

定理3.15 设$x=x_0$是微分方程（5.1）的正则奇点，且$(x-x_0)p(x)$和$(x-x_0)^2q(x)$可以展成$(x-x_0)$的幂级数，它们都在区间$|x-x_0|<R(>0)$内收敛，则方程(5.1)在区间$|x-x_0|<R$

内至少有一个收敛的广义幂级数解(5.18)。

证明与定理3.14相似，这里就不讨论了。

贝塞尔 (Bessel) 方程. 形如

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.19}$$

的方程称为贝塞尔方程。其中ν是非负实数。

对于方程(5.19)，先将它写成(5.1)的形式

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0.$$

容易看出，$x_0 = 0$是贝塞尔方程的正则奇点，且

$$xp(x) = 1, \quad x^2q(x) = x^2 - \nu^2.$$

根据定理3.15，可求形如(5.18)的广义幂级数解。因此 设

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0), \tag{5.20}$$

并将y、y'、y''代入方程(5.19)，推得

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s+\nu)(n+s-\nu)a_n + a_{n-2}]x^{n+s} = 0.$$

令各项系数等于零，我们得到递推公式

$$[(n+s)^2 - \nu^2]a_n + a_{n-2} = 0 \tag{5.21}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

因为$a_0 \neq 0$，故当$n = 0$时可得指数方程为

$$s^2 - \nu^2 = 0,$$

求出指数$s_1 = \nu$和$s_2 = -\nu$。

对于$s = s_1 = \nu$的情形，由公式(5.21)得

$$n(2\nu + n)a_n + a_{n-2} = 0,$$

当$n = 1$时，由

$$(2\nu + 1)a_1 = 0,$$

推得$a_1=0$，从而所有的$a_{2k+1}=0$，当$n=2$，4，…时，有

$$a_2=-\frac{1}{2(2\nu+2)}a_0,$$

$$a_4=-\frac{1}{4(2\nu+4)}a_2=\frac{1}{2^4 2(\nu+1)(\nu+2)}a_0,$$

……

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}a_0,$$

……

代入(5.20)，我们得到方程(5.19)的一个解

$$y_1=a_0x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}.$$

如果选取任意常数$a_0=\frac{1}{2^\nu\nu!}$，就可得到ν阶第一类贝塞尔函数

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!(\nu+k)!},\tag{5.22}$$

这里引入Γ(嘎马) 函数的记号$\left(\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{p-1}e^{-t}dt,\ p>0\right)$，并利用公式

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\quad \Gamma(n+1)=n!,$$

规定当$p=0$，-1，-2，…时，$\frac{1}{\Gamma(p)}=0$。于是表达式(5.22)可写为

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\tag{5.23}$$

对于$s=s_2=-\nu$的情形，只要重复前述步骤，就可类似地得到$-\nu$阶第一类贝塞尔函数

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \quad (5.24)$$

可直接验证，当$0<|x|<\infty$时，广义幂级数(5.23)和(5.24)都是收敛的，而且可逐项微分。因此$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$都是方程(5.19)的解。

当ν不是整数时，由于解$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$是分别由x的不同幂次开始的级数，显然它们是线性无关的，所以方程（5.19）的通解可写为

$$y=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x).$$

当ν是整数时，设$\nu=n(\geqslant 1)$，由于级数(5.24)的求和实际上是从$k=n$开始的，于是

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n},$$

令$k-n=m$,

$$\begin{aligned}J_{-n}(x)&=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\\&=(-1)^nJ_n(x).\end{aligned}$$

就是说，$J_{-n}(x)$与$J_n(x)$并非线性无关。这时要写出方程(5.19)的通解就得另找一个与$J_n(x)$线性无关的解来。为此，一种方法是§2例5的方法，求出与$J_n(x)$线性无关的解

$$y_2=J_n(x)\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}.$$

然而通常的方法是取充分接近n的ν，作$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$的线性组合。

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

显然$N_\nu(x)$是贝塞尔方程的解。然后再令$\nu\to n$就得到一个与$J_n(x)$

线性无关的解$N_n(x)$，即

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

我们称 $N_n(x)$ （及$N_\nu(x)$） 为诺曼 （Neuman） 函数或为第二类贝塞尔函数。于是方程(5.19)的通解可写成

$$y=c_1J_\nu(x)+c_2N_\nu(x) \tag{5.25}$$

这时不管ν是否为整数，(5.25)都是贝塞尔方程的通解。

例4 求方程

$$x^2y''+xy'+\left(9x^2-\frac{4}{25}\right)y=0$$

的通解。

解 令$\xi=3x$，将方程化为

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+\xi\frac{dy}{d\xi}+\left(\xi^2-\frac{4}{25}\right)y=0,$$

这里$\nu=\dfrac{2}{5}$不是整数，因此通解可写为

$$y=c_1J_{\frac{2}{5}}(3x)+c_2J_{-\frac{2}{5}}(3x).$$

§6 非线性方程

对于二阶方程

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{6.1}$$

或

$$y''=f(x,y,y') \tag{6.2}$$

是非线性方程时，它的求解问题，一般说来，要比前几节讨论的线性方程复杂得多，困难得多，本节我们仅对一些特殊方程，介

绍几种解法。

首先，讨论对非线性方程的线性化问题，这是解非线性方程的一个主要方法。但从实际问题讲这就意味着丢掉某些次要因素，而这样做的前提是仍能反映原来实际问题的本质。就是说将非线性方程简化成线性方程是有条件的，并非每一个非线性方程都可这样作。下面我们给出"线性化"这个方法的实施步骤。

对非线性方程(6.2)(即函数$f(x,y,y')$关于变元y和y'是非线性的)。我们假设函数$f(x,y,y')$在(x,y_0,y_0')的邻域内关于$(y-y_0)$和$(y'-y_0')$可展成泰勒级数，即

$$f(x,y,y')=f(x,y_0,y_0')+\frac{\partial f(x,y_0,y_0')}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f(x,y_0,y_0')}{\partial y'}(y'-y_0')+\cdots.$$

略去关于$(y-y_0)$和$(y'-y_0')$的高次项，就得到一个近似的二阶线性微分方程。

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x), \tag{6.3}$$

其中$p(x)=-\dfrac{\partial f(x,y_0,y_0')}{\partial y'}$，　$q(x)=-\dfrac{\partial f(x,y_0,y_0')}{\partial y}$，

$g(x)=f(x,y_0,y_0')-y_0\dfrac{\partial f}{\partial y}-y_0'\dfrac{\partial f}{\partial y'}$。显然$p(x)$，$q(x)$和$g(x)$都是已知的连续函数。关于线性方程(6.3)的解法，我们已经知道，所以方程(6.3)的解就是非线性方程(6.2)的近似解。

例1　将非线性方程

$$y''=2xy'^2+y^2$$

在$(x,1,1)$邻域内化成近似的线性方程。

解　由于$f(x,y,y')=2xy'^2+y^2$是解析函数，而

$$\frac{\partial f(x,1,1)}{\partial y}=2, \qquad \frac{2f(x,1,1)}{\partial y'}=4x,$$

故将$f(x,y,y')$在$(x,1,1)$邻域内展成幂级数

$$f(x,y,y')=2x+1+2(y-1)+4x(y'-1)+\cdots$$

略去高次项，得近似的线性方程为

$$y''-4xy'-2y=-2x-1,$$

例2 单摆振动问题：设有一条长为l的细线，一端固定，另一端系一个质量为m的小球，让其自由摆动。称这种装置为单摆(图3—8)。试求它的运动方程。

解 记摆线与垂线的夹角为θ，当小球摆动时，画出的弧长为$l\theta$，于是沿着切线方向的加速度为$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$。又因重力mg在切线方向线的投影为$-mg\sin\theta$。如果略去阻力不计，则根据牛顿第二定律，有

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta,$$

或

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

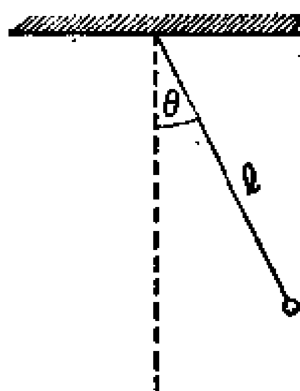


图3—8

这是一个非线性方程。当θ很小时，有$\sin\theta\sim\theta\left(\text{实际中}|\theta|<\frac{\pi}{6}\right)$，于是可用线性方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

来代替上面的非线性方程。而线性方程的通解由§4知可写为

$$\theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \theta\right).$$

这就是单摆振动的近似公式。

其次，我们来研究降阶法。一般来说，求解一个阶数较低的微分方程总比解相应的高阶方程要容易一些，因此，对于高阶方程设法把它的阶数降低，这就是很自然的事了。下面仅对方程(6.1)介绍几种常见的降阶法。

1.不含未知函数的方程。这时方程(6.1)的形状为

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{6.4}$$

对于方程(6.4)，若令$y' = p$，则$y'' = \frac{dp}{dx}$。因此方程(6.4)变成一个关于p的一阶方程

$$F(x, p, p') = 0. \tag{6.5}$$

如果我们求得方程(6.5)的通解为

$$p = \varphi(x, c),$$

那么，积分

$$y' = \varphi(x, c)$$

就得到方程(6.4)的通解。

例3 求方程

$$y'' - y'^2 = 0$$

的通解。

解 令$y' = p$，则$y'' = \frac{dp}{dx}$，代入方程，得到

$$\frac{dp}{dx} - p^2 = 0,$$

这是一个一阶方程，解出

$$p=-\frac{1}{x+c},$$

即

$$y'=-\frac{1}{x+c}.$$

积分得到

$$y=-\ln|x+c|+c.$$

例4 若将一根绳子（或普通的电线），悬挂在A和B两个支点上，并将两端固定。假设绳子的密度ρ是均匀的，而且是柔软的，由于自身的重量，它弯曲的形状如图3—9所示。称这种形状的曲线为悬链线。试求曲线的函数关系式。

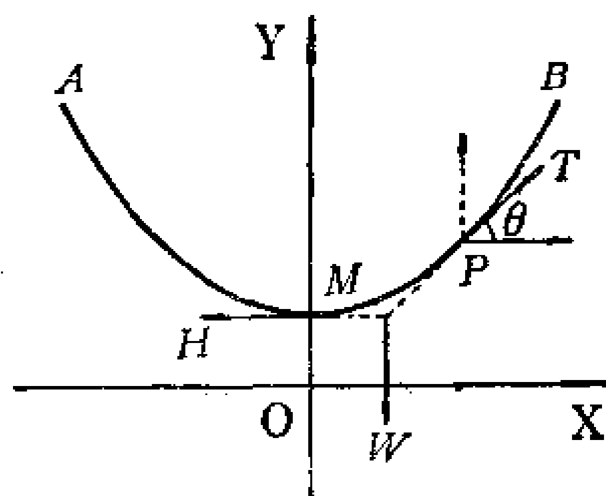


图3—9

解 我们先建立这种曲线应满足的微分方程。在AB上任取一段MP，设这段绳子在P点的张力为T，M点的张力为H，若以W表示这一段的重量，于是MP这段绳子的平衡条件是

$$T\cos\theta=H$$

$$T\sin\theta=W=\int_0^s\rho(\tau)\,d\tau,$$

消去T得

$$H\text{tg}\theta = W = \rho_0 s.$$

今取水平方向为x轴，$a=\frac{\rho_0}{H}$，M点在y轴上其坐标为$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$，于是得到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = as,$$

由于$ds^2 = dx^2 + dy^2$，故得

$$y'' = a\sqrt{1+y'^2},$$

显然，初始条件为

$$y(0)=\frac{1}{a}, \qquad y'(0)=0.$$

令$y'=p$，则方程变为

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a dx.$$

由于$y'(0)=p(0)=0$，故积分得

$$p=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax}).$$

再利用条件$y(0)=\frac{1}{a}$，对方程

$$y'=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$$

积分，得到

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax}).$$

2.不显含自变量的方程．这时方程(6.1) 的形状为

$$F(y,\ y',\ y'')=0. \tag{6.6}$$

若令$y'=p$，而把p看作新的未知函数，y作为自变量，则有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\ \frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

代入方程(6.6)，得到

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right)=0, \tag{6.7}$$

如果求得一阶方程(6.7)的通解为

$$p=\psi(y,\ c),$$

那么由方程

$$y'=\varphi(y,\ c)$$

就可求得方程(6.6)的通解。

例5 求方程

$$yy''-y'^2=0$$

的通解。

解 令$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，于是原方程变为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0,$$

或

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$$

积分得

$$p=c_1y.$$

再由方程

$$y'=c_1y,$$

即可求得原方程的通解为

$$y=c_2e^{c_1x}.$$

3.全微分方程. 若方程(6.1)的左端是某个一阶微分表达式$\Phi(x, y, y')$的全微分，即

$$d\Phi(x, y, y') = F(x, y, y', y'').$$

则称(6.1)为全微分方程。

此时，方程(6.1)可写成

$$d\Phi(x, y, y') = 0.$$

从而沿着方程(6.1)的每个积分曲线，函数Φ恒等于一个常数，即

$$\Phi(x, y, y') = c. \tag{6.8}$$

我们称(6.9)为方程(6.1)的初积分。它是一个一阶方程。显然，方程(6.8)和(6.1)是等价的。因而方程(6.8)的通解也是方程(6.1)的通解。

例6 求方程

$$yy'' + y'^2 = 0$$

的通解。

解 很明显，方程的左端是一个全微分，即

$$\frac{d}{dx}(yy') = yy'' + y'^2,$$

于是求得初积分为

$$yy' = c_1.$$

从而求得原方程的通解为

$$y^2 = 2c_1x + c_2.$$

若方程(6.1)不是全微分方程，但乘以某个不为零的一阶微分表达式$\mu(x, y, y')$后，使得方程

$$\mu F(x, y, y', y'') = 0$$

为全微分方程。我们称$\mu(x, y, y')$为方程(6.1)的积分因子。

例7 求方程

$$yy''+2y^2y'^2+y'^2-\frac{2yy'}{x}=0$$

的通解。

解 这个方程的左端不能写成某个一阶微分表达式的全微分，但乘以$\mu=\dfrac{1}{yy'}$后，就有

$$\frac{d}{dx}(\ln|y'|+y^2+\ln|y|-2\ln|x|)=\frac{y''}{y'}+2yy'+\frac{y'}{y}-\frac{2}{x}.$$

于是得到初积分

$$yy'e^{y^2}-c_1x^2=0.$$

这是个一阶全微分方程，由于

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{c_1}{3}x^3\right)=yy'e^{y^2}-c_1x^2,$$

从而得到原方程的通解为

$$\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{c_1}{3}x^3=c_2.$$

4.齐次方程．若方程(6.1)的左端，关于变量y，y'，y''是齐次的，即对任意$k\neq0$有恒等式

$$F(x,\ ky,\ ky',\ ky'')=k^mF(x,\ y,\ y',\ y'')$$

成立．则称方程(6.1)为m次齐次方程．其中m为正整数。

此时，取$k=\dfrac{1}{y}$，则方程(6.1)可写为

$$F\left(x,\ 1,\ \frac{y'}{y},\ \frac{y''}{y}\right)=0, \tag{6.9}$$

引入新的未知函数 $Z=\dfrac{y'}{y}$，即令

$$y = e^{\int z dx} \tag{6.10}$$

就可把方程(6.9)降为一阶方程．事实上

$$y' = yz,\ \ y'' = y(z^2 + z'),$$

代入方程(6.9)，得到

$$F(x,\ 1,\ z,\ z^2 + z') = 0,$$

或写成

$$f(x,\ z,\ z') = 0 \tag{6.11}$$

如果求得一阶方程(6.11)的通解为

$$z = \psi(x,\ c),$$

那么由(6.10)就可得到方程(6.1) 的通解。

例8 求方程

$$x^2 y y'' - (y - xy')^2 = 0$$

的通解。

解 方程的左端关于y，y'，y''是2次齐次式，因此，令

$$y = e^{\int z dx},$$

就可把方程降为一阶方程

$$x^2 z' + 2xz - 1 = 0,$$

它的解是

$$z = \frac{c_1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

故原方程的通解为

$$y = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}.$$

以上介绍的四种降阶方法，同样亦适用于高阶方程。

习　题

1. 讨论下列函数对在其定义区间内是线性相关还是线性无关。

(1) $\sin x,\ 1$；　(2) $t+5,\ t-5$；　(3) $\frac{1}{x},\ e^{\frac{1}{x}}$；

(4) $x,\ \ln x$；　(5) $e^x,\ 0$；　(6) $\sin^2 t,\ \cos^2 t$。

2. 求第1题中各函数对的朗斯基行列式。

求下列方程的通解：

3. $x^2y''-xy'+y=0$，已知一个解$y_1=x$。

4. $\sin^2 x\cdot y''-2y=0$，已知一个解$y_1=\operatorname{ctg}x$。

5. $y''-(a^2x^2+a)y=0$，已知一个解$y_1=e^{\frac{1}{2}ax^2}$。

6. $y''-(1+\operatorname{tg}^2x)y=0$，已知一个解$y_1=\frac{1}{\cos x}$。

7. $y''+xy'+y=0$，已知一个解$y_1=e^{-\frac{1}{2}x^2}$。

8. 求方程 $y''+xy'+(n+1)y=0$（n为自然数）的通解。（提示：利用第7题的结果）

9. 试证下列函数对是线性无关的，并进而求出以这些函数对为基本解组的二阶线性齐次方程。

(1) $x^2+x+3,\ e^{-x}$；　(2) $x+a,\ xe^{\frac{a}{x}}$（a为常数）；

(3) $x,\ xe^{2x}$；　(4) $\ln x, \ln x\int\frac{dx}{\ln^2 x}$；

(5) $x-1,\ x^2e^x$；　(6) $x,\ e^{\frac{x^2}{8}}-x\int xe^{\frac{x^2}{8}}dx$；

(7) $\frac{1}{\sqrt{x}},\ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{x}}$；　(8) $\frac{1}{x},\ \frac{(ax+b)^2}{x}$（$a$、$b$为常数）；

(9) $x,\ x\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{2x^2}}dx$；　(10) $x^{\frac{1}{4}}\cos\sqrt{x},\ x^{\frac{1}{4}}\sin\sqrt{x}$。

10．函数$x^2\sin x$有可能是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

在$(-a,\ a)$ $(a>0)$内的解吗？其中$p(x)$，$q(x)$在$(-a,\ a)$ 内连续。

11．设y_1，y_2是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

其中 $p, q\in C(I)$，$I=[a,\ b]$ 的两个线性无关解，试求$y_2=y_1^2$成立的充要条件。

12．若下面两个线性齐次方程

$$y''+p_1(x)y'+q_1(x)y=0,\quad y''+p_2(x)y'+q_2(x)y=0$$

有一个公共解，试求此解并分别求出这两个方程的通解，及求出p_1，p_2，q_1，q_2之间的关系式(p_1，p_2，q_1，q_2是连续函数)。

13．若$y(x)$与$a(x)y(x)$同是方程$y''+I(x)y=0$的解，试证：

$\dfrac{a''}{a'}=-2\dfrac{y'}{y}$成立。

14．设y_1，y_2，y_3是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$，(p，q，f 是连续函数)(*)的解，且 $\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}\neq$常数，求证 $y=(1-c_1-c_2)y_1+c_1y_1+c_2y_3$($c_1$，$c_2$为任意常数) 是(*) 的通解。

求下列方程的通解：

15．$y''-5y'+6y=0$。

16．$y''+3y'-2y=0$。

17．$y''+y'+4y=0$。

18．$x''+3x'+2x=0$。

19．$x''+x'+x=0$。

20．$s''+2as'+a^2s=0$ (a为常数)。

证明下列方程均可化为常系数方程并求通解：

21. $y''+y'+ae^{-2x}y=0$.

22. $y''-4xy'+(4x^2-1)y=0$.

23. $y''+\sqrt{x}y'+\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{x}{4}-9\right)y=0$.

24. $y''+\text{tg}x\cdot y'+a\cos x\cdot y=0$.

25. 方程 $y''-a\frac{p'(x)}{p(x)}y'+bp^{2a}(x)y=0$中$p(x)\neq0$,若令$t=\int p^a(x)dx$则可化为$y''+by=0$.

求下列方程的通解:

26. $y''-4y'+4y=x^2$.

27. $y''-a^2y=t+1\quad(a\neq0)$.

28. $y''-y'=x\sin^2x$.

29. $y''+4y=\frac{1}{2}(x+\cos2x)$.

30. $y''+y'-2y=3e^x-\frac{1}{2}\sin x$.

31. $y''-6y'+9y=e^{3x}+9$.

32. $y''-6y'+9y=(1+x+x^2+\cdots+x^{25})e^{3x}$.

33. $t^2x''-tx'+2x=t\ln t$.

34. 求 $(x^2-1)y''-6y=1$ 的通解，设其对应的齐次方程的一特解为多项式.

35. 求方程$y''-y'-2y=3e^{-x}$在$x=0$处与直线$y=x$相切的解.

36. 设函数$y(x)$的二阶导函数连续且$y'(0)=0$,试由方程

$$y(x)=1+\frac{1}{3}\int_0^x[-y''(t)-2y(t)+6te^{-t}]dt$$确定此函数.

求下列方程组的解:

37. $x_1'(t)=3x_1(t)-2x_2(t)$;　$x_2'(t)=2x_1(t)-2x_2(t)+2e^t$.

38. $x_1'(t)=x_2$, $x_2'(t)=-x_1(t)+t^2+\cos t$, $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=0$.

39. $x'=3x-2y+\sin t$, $y'=5x-3y$, $x(0)=0$, $y(0)=\frac{3}{4}$.

40. 证明下列每个函数均是指数级的函数：

(1) $\sin\omega t$, ω为常数；　(2) e^{ax}, a为常数；

(3) x^n, n为正整数；　(4) $\ln(x+1)$.

41. 求下列函数的拉氏变换：

(1) x^n；　(2) xe^{ax}；　(3) $x\sin\omega x$；

(4) $x\cos\omega x$；(5) $\frac{1}{\sqrt{x}}$；　(6) $\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x}$；

42. 求下列函数的拉氏逆变换：

(1) $\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}$；(2) $\frac{1}{(s^2+1)(s+2)}$；(3) $\frac{1}{(s-1)(s-2)}$；

(4) $\frac{1}{s(s+1)^2}$；　(5) $\frac{1}{s(s+1)}$；　(6) $\frac{s-4}{(s^2+4)^2}$.

用拉氏变换求下列始值问题的解：

43. $y''+3y'+2y=e^{5x}$,　$y(0)=1$, $y'(0)=2$.

44. $y''-y'-6y=\sin x$,　$y(0)=1$, $y'(0)=0$.

45. $y''+y=x$; $y(0)=0$;　$y'(0)=1$.

46. $y''-3y'+2y=4x+e^{3x}$,　$y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

用幂级数法求下列方程的通解并指出收敛半径：

47. $y''+4xy=0$, 在$x=0$.

48. $y''-xy'+ny=0$, 在$x=0$.

49. $(1-x^2)y''-6xy'-4y=0$, 在$x=0$.

50. $(1+4x^2)y''-8y=0$, 在$x=0$.

51. $4xy''+2y'+y=0$, 在$x=0$.

52. $2xy''+5(1-2x)y'-5y=0$, 在$x=0$.

53. $8x^2y''+10xy'-(1+x)y=0$, 在$x=0$.

54. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right) y = 0$, 在$x = 0$。

用降阶法求下列方程的通解：

55. $y'' + \sqrt{1 - y'^2} = 0$。

56. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$。

57. $y'' + \frac{2}{1 - y}y'^2 = 0$。

58. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$。

59. $x^3\frac{d^2x}{dt^2} + 1 = 0$。

60. $y''^2 - y' = 0$。

61. $x^2y'' - 3xy' + 2(y')^2 = 0$。

62. $yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$。

63. $yy'' - y'^2 - y'^4 = 0$。

64. $y'y'' - y'^2 = 0$。

求下列始值问题的解：

65. $y'' + y'^2 = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

66. $y'' = 3\sqrt{y}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

67. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y$; $y(0) = 1$, $z(0) = \frac{1}{2}$.

68. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}$, $y(0) = 2$, $z(0) = -\frac{1}{2}$.

69. 一个物体，只受地球引力的作用，自无穷高处落下，求这个物体落到地面的速度(地球的半径大约为6400千米)。

70. 假设空气的阻力与速度的平方成正比例，而且当$t\to\infty$时，速度以75米/秒为极限，求初始速度为零的落体的运动规律。

71. 长6米的一链条自桌上滑下，运动开始时，链条自桌上垂下的部分有一米长。问链条全部滑过桌子需要多少时间？(摩擦不计)

72. 火车沿水平的道路运行，火车的重量是P，机车的牵引力是F，运动时的阻力 $W=a+b\frac{dx}{dt}$，其中a，b是常数，而$\frac{dx}{dt}$是速度，x是走过的路程，试确定火车的运动规律.已知$t=0$时，$x(0)=0$，$x'(0)=0$.

73. 一个重P公斤的物体挂在弹簧上，把弹簧拉长了a厘米，接着又被拉长了A厘米，然后松开，松开时的速度为零（初速为0），求弹簧的运动规律(介质阻力不计).

74. 一质点徐徐地沉入液体，当沉入时，液体的反作用力与下沉的速度成正比例，求质点的运动规律.

75. 一物体在大气中降落，初速为零，空气的阻力与速度的平方成正比例，求物体的运动规律.

第四章　基本定理

§1　引　　言

我们知道，常微分方程的基本问题是求已知微分方程的解，以及研究解的各种属性。从前面几章可以看到，利用初等积分法与代数方法，对于某些方程，特别是常系数线性方程的始值问题，虽然能够求得所要求的解，但毕竟是很有限的；同时，所利用的方法都带有较大的局限性，例如象曾经提到过的黎卡提方程，竟无章可循。可以想到对于一般的非线性方程就更困难了。为了判明一个定解问题的解是否存在，如果存在的话，解又有多少，从理论上给以论证，自然是完全必要的。这正是本章所要讨论的内容。

考虑到常微分方程是一门基础课程，所以我们仅对数量方程进行讨论。至于向量方程的情形，推广工作并不太困难。

在这章里，我们讨论一阶显式方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1.1}$$

其中f是t，x的已知函数，恒假定$f(t,x)$在(t,x)平面上的区域D内连续。我们将要证明方程(1.1)的满足初始条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{1.2}$$

的解，在包含t_0的某区间$I=(a,b)$ $(I\subset D)$内存在，并且还要讨论解的唯一性，延拓性和解对初值的连续性与可微性。

假设点$(t_0, x_0)\in D$，$f(t, x)$在D内连续，不难看出求解始值问题(1.1)、(1.2)，等价于去求一连续函数$x(t)$，它在包含t_0的某区间$I(I\subset D)$内有定义且满足积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[s, x(s)]ds \qquad (t\in I), \qquad (1.3)$$

对此，我们建立引理如下：

引理 1 如果函数$\varphi(t)$是始值问题(1.1)、(1.2) 在I内的解，那么$\varphi(t)$在I内满足积分方程(1.3)。反之，如果$\varphi(t)$是(1.3)在I内的连续解，那么$\varphi(t)$在I内满足方程(1.1)和条件 (1.2)。

证明 设 $\varphi(t)$是方程 (1.1) 在 I 内的解，且满足初始条件(1.2)，于是有

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f[t, \varphi(t)], \qquad (t\in I)$$

两端从t_0到t积分，得到

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f[s, \varphi(s)]ds,$$

注意到条件(1.2)，便得到

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[s, \varphi(s)]ds, \qquad (t\in I)$$

所以$\varphi(t)$满足积分方程(1.3)。

反之，设$\varphi(t)$是积分方程(1.3)在I内的连续解，那么$f[t, \varphi(t)]$连续，从而(1.3)的左端可微，于是$\varphi(t)$满足

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f[t, \varphi(t)], \qquad (t\in I)$$

并且在 (1, 3)中，让$t=t_0$，得到 $\varphi(t_0)=x_0$，即满足初始条件(1.2)。

通过引理 1，我们可以把对始值问题(1.1)、(1.2)的讨论转化为对积分方程(1.3) 的讨论。而这种转化将会带来许多方便。

§2 存在唯一性定理

关于始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,\ x), & (2.1)\\ x(t_0)=x_0 & (2.2)\end{cases}$$

的解的存在唯一性，我们将利用毕卡(Picard)的逐步逼近法来证明。此方法主要思想是在所设条件下，构造一个连续函数序列，它一致收敛的极限函数正好是所求始值问题的解。采用这个方法不但证明了解的存在性，而且在应用上还使计算这个解的近似值成为可能。

定理4.1 设函数$f(t,\ x)$在区域D内的矩形域$R=\{(t,\ x):|t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$上连续，且关于$x$满足李普希茨条件，即存在所谓李普希茨常数$L>0$，使得

$$|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\leqslant L|x_1-x_2| \tag{2.3}$$

$(t,\ x_1)$、$(t,\ x_2)\in R$。则方程(2.1)在区间$|t-t_0|\leqslant h$上存在满足初始条件(2.2)的解$x=\varphi(t)$，而且是唯一的，其中$h=\min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$，$M=\max\limits_R|f(t,\ x)|$。

证明 依据引理1，这个定理的证明，可转化为证明积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f[s,\ x(s)]ds \tag{2.4}$$

在区间$|t-t_0|\leqslant h$上存在唯一的连续解，证明如下：

1) 在$|t-t_0|\leqslant h$上，先构造一个作为逐步近似的连续函数序列$\{x_n(t)\}$，而且每一个$x_n(t)$都不越出区域R。取初值x_0为零次

近似，然后利用（2.4），用零次近似x_0代替积分号下的$x(t)$，得到函数

$$x_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ x_0)ds \tag{2.5}$$

显然，$x_1(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上是一个续函数，由(2.5)推出

$$|x_1(t)-x_0|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\ x_0)|ds\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b.$$

这表明函数$x=x_1(t)$，当$|t-t_0|\leqslant h$时是连续的，且将位于矩形域R上，我们称它为一次近似。

再利用(2.4) 作出二次近似

$$x_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[s,\ x_1(s)]ds,$$

同样地，有

$$|x_2(t)-x_0|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b$$

可以看出，当$|t-t_0|\leqslant h$时，函数$x=x_2(t)$也是连续的，而且它也完全位于矩形域R上。

一般地，规定了$n-1$次近似以后，就可利用(2.4)式得出n次近似：

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[s,\ x_{n-1}(s)]ds \tag{2.6}$$

这样，我们就可得到一个函数序列$\{x_n(t)\}$。利用数学归纳法容易证明，每一个 $x_n(t)$ 在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上都是连续的，都满足$x_n(t_0)=x_0$，都位于矩形域R上。

2）下面证明按上述方法构造的函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在区间$|t-t_0|\leqslant h$上一致收敛。为此，考察级数

$$x_0+[x_1(t)-x_0]+[x_2(t)-x_1(t)]+\cdots+[x_n(t)-x_{n-1}(t)]+\cdots. \tag{2.7}$$

它的部分和为 $x_n(t)$。于是，如果能够证明级数 (2.7)在$|t-t_0|$

$\leqslant h$上是一致收敛的，那么序列$\{x_n(t)\}$也就在同一区间上一致收敛。

现在我们对级数(2.7) 的各项作估计，为此证明估计式

$$|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\leqslant \frac{ML^{n-1}}{n!}|t-t_0|^n$$
$$(n=1,2,3,\cdots,) \qquad (2.8)$$

成立。事实上，当$n=1$时，由(2.5)得出

$$|x_1(t)-x_0|\leqslant M|t-t_0|,$$

这表明估计式(2.8)成立。今设$n=k-1$时估计式(2.8)，即

$$|x_{k-1}(t)-x_{k-2}(t)|\leqslant\frac{ML^{k-2}}{(k-1)!}|t-t_0|^{k-1}$$

成立。证明$n=k$时，估计式(2.8) 也成立。注意到 $f(t, x)$满足李普希茨条件及(2.6) 式，我们就可推得

$$\begin{aligned}|x_k(t)-x_{k-1}(t)| &= \left|\int_{t_0}^t f[s,\ x_{k-1}(s)]ds\right.\\ &\qquad \left.-\int_{t_0}^t f[s,\ x_{k-2}(s)]ds\right|\\ &\leqslant\left|\int_{t_0}^t |f[s,\ x_{k-1}(s)]\right.\\ &\qquad \left.-f[s,\ x_{k-2}(s)]|ds\right|\\ &\leqslant L\left|\int_{t_0}^t |x_{k-1}(s)-x_{k-2}(s)|ds\right|\\ &\leqslant\frac{ML^{k-1}}{(k-1)!}\left|\int_{t_0}^t|s-t_0|^{k-1}ds\right|\\ &=\frac{ML^{k-1}}{k!}|t-t_0|^k.\end{aligned}$$

所以对一切正整数n，估计式(2.8)都成立。

由于$|t-t_0|\leqslant h$，从而

$$|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}h^n.$$

而正项级数

$$Mh+ML\frac{h^2}{2!}+\cdots+ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}+\cdots$$

是收敛的，因此由维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法推知，函数项级数(2.7)在$|t-t_0|\leqslant h$上一致收敛。由此可知序列$\{x_n(t)\}$收敛。并且在$|t-t_0|\leqslant h$上是一致的。我们记这个极限为$\varphi(t)$，就是

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\varphi(t),$$

并且函数$x=\varphi(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上连续；又注意到(2.6)便知$\varphi(t_0)=x_0$。

3）再来证明函数$\varphi(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上是积分方程(2.4)的一个解。现在对(2.6)式：

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f[s,\ x_{n-1}(s)]ds$$

两端取极限，当$n\to\infty$，注意到收敛的一致性和$f(t,x)$的一致连续性，便得到

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f[s,\ \varphi(s)]ds.$$

这表明$\psi(t)$是积分方程(2.6)的连续解，从而也是始值问题(2.1)、(2.2)的解。存在性获证。

4）证明解的唯一性。设积分方程(2.4)还有另一个解$\psi(t)$，满足$\varphi(t_0)=x_0$，由

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f[s,\ \varphi(s)]ds$$

和
$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f[s,\ \psi(s)]ds,$$

两式相减可得

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t)-\psi(t)| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f[s,\ \varphi(s)]-f[s,\ \psi(s)]|ds\right| \\
&\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(s)-\psi(s)|ds\right| \\
&\leqslant L\left|\int_{t_0-h}^{t_0+h} |\varphi(s)-\psi(s)|ds\right| \\
&\leqslant 2hL \max_{|t-t_0|\leqslant h} |\varphi(t)-\psi(t)|,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\max_{|t-t_0|\leqslant h} |\varphi(t)-\psi(t)| \leqslant 2hL \max_{|t-t_0|\leqslant h} |\varphi(t)-\psi(t)|.
$$

如果$\max|\varphi(t)-\psi(t)|\neq 0$，则当选取$h$，使$2hL<1$(注意解$\varphi(t)$和$\psi(t)$都是在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在的)，就得到了矛盾。所以$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上恒等，即$\varphi(t)\equiv\psi(t)$唯一性获证。

例 1 设矩形域$R=\{(t,\ x):|t|\leqslant 1,\ |x|\leqslant 1\}$，试求始值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}=t^2+x^2 \\
x(0)=0
\end{cases}
$$

的解的一次、二次近似。

解 根据定理1，这里 $a=b=1$，而$M=\max\limits_{R}|t^2+x^2|=2$，所以 $h=\min\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，逐次近似序列在$|t|\leqslant\dfrac{1}{2}$上一致收敛。与始值问题等价的积分方程为

$$
x(t)=0+\int_0^t [s^2+x^2(s)]ds,
$$

零次近似取为$x_0=0$，则一次、二次近似分别为

$$
x_1(t)=\int_0^t (s^2+0^2)ds=\frac{t^3}{3}
$$

$$x_2(t)=\int_0^t\left[s^2+\left(\frac{s^3}{3}\right)^2\right]ds=\frac{t^3}{3}+\frac{t^7}{63}.$$

例 2 设在区域$D=\{(t,\ x);\ t_0\leqslant t<+\infty,\ -\infty<x<+\infty\}$内，$f(t,\ x)$续且$|f(t,\ x)|\leqslant k$（常数），试证对于一切$t\geqslant t_0$,始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,\ x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解$x(t)$存在。

证明 对于任意的$a>0$，$b>0$，矩形域$R=\{(t,\ x);\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+a,\ x_0-b\leqslant x\leqslant x_0+b\}\subset D$，而

$$\max_R|f(t,\ x)|=M\leqslant K.$$

因此，根据定理 1，当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$时，始值问题的解存在。

由于a、b可选取任意大的正数，即$h=\min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$可以任意大，所以对一切$t\geqslant t_0$，解$x(t)$存在。

§ 3* 存在性定理

现在我们继续研究方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x),\tag{3.1}$$

其中$f(t,\ x)$是$(t,\ x)$平面上某区域D内的连续函数。关于（3.1）的解的存在性问题，曾经引起很多数学家的注意，即考虑$f(t,x)$

应具有什么条件，方能保证解是存在的。历史上最早回答这个问题并给以严格论证的是哥西。而意大利数学家皮亚诺（Peano）在只假定(3.1)右端函数$f(t, x)$连续的条件下，首先建立了满足初始条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{3.2}$$

的解的局部存在定理。后来有不少数学家作了大量的工作，在这里我们选用的证明方法是尤拉折线法。所谓尤拉折线法，就是用由直线段组成的折线去逼近微分方程的积分曲线，而构成这条折线的每一线段，都位于积分曲线的切线上。从某种意义上讲尤拉折线是方程的一条近似解曲线。显然，构成折线的每个线段越短，近似程度越好。

现在先给出ε—解的定义。

定义 1 若函数$\varphi(t)$在区间$I(I\subset D)$上连续，并且满足：

a) 对于$t\in I$，$(t, \varphi(t))\in D$；

b) 除去I的有限个点外，$\varphi(t)$连续可微；

c) 在$\frac{d\varphi}{dt}$存在且连续的那些点上，

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}-f[t, \varphi(t)]\right|\leqslant\varepsilon$$

则称函数$\varphi(t)$是方程(3.1)的在区间I上的ε—解。

引理 2 设在区域 $R=\{(t, x); |t-t_0|\leqslant a, |x-x_0|\leqslant b\}$上，函数$f(t, x)$连续，则对任意的$\varepsilon>0$，方程(3.1)在$|t-t_0|\leqslant h$上存在满足条件(3.2)的 ε—解$\varphi(t)$，这里，$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$，$M=\max\limits_{R}|f(t,x)|$。

证明 我们的证明仅在区间$[t_0, t_0+h]$上进行，至于在

$[t_0-h,\ t_0]$上是完全类似的。因为$f(t,x)$在R上是一致连续的，所以对任意的$\varepsilon>0$，总存在着$\delta(\varepsilon)>0$，当$(t,x)\in R$，$(\bar{t},\ \bar{x})\in R$而$|t-\bar{t}|\leqslant\delta(\varepsilon)$，$|x-\bar{x}|\leqslant\delta(\varepsilon)$时，使得

$$|f(t,\ x)-f(\bar{t},\ \bar{x})|\leqslant\varepsilon. \tag{3.3}$$

部分区间$[t_0,\ t_0+h]$，其分点为

$$t_0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_{n-1}<t_n=t_0+h,$$

使得

$$\max|t_k-t_{k-1}|\leqslant\max\left[\delta(\varepsilon),\ \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right].$$

今在区间$[t_0,\ t_0-h]$上作尤拉折线，就是定义函数$\varphi(t)$如下：

$$\varphi(t_0)=x_0,$$

$$\varphi(t)=\varphi(t_{k-1})+f[t_{k-1},\ \varphi(t_{k-1})](t-t_{k-1})$$

$$t_{k-1}<t\leqslant t_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{3.4}$$

我们来证明，函数$\varphi(t)$是方程(3.1)的在$[t_0,\ t_0+h]$上的ε—解。

显然，函数$\varphi(t)$在区间(t_{k-1},t_k) $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.)$内连续可微。其次，当t、$\bar{t}\in[t_0,\ t_0+h]$时，有

$$|\varphi(t)-\varphi(\bar{t})|\leqslant M|t-\bar{t}| \tag{3.5}$$

事实上，当t、$\bar{t}\in[t_{k-1},\ t_k]$时，我们有

$$\varphi(t)=\varphi(t_{k-1})+f(t_{k-1},\ \varphi(t_{k-1}))(t-t_{k-1}),$$

$$\varphi(\bar{t})=\varphi(t_{k-1})+f((t_{k-1},\varphi(t_{k-1}))(\bar{t}-t_{k-1}).$$

从而

$$|\varphi(t)-\varphi(\bar{t})|=|f[t_{k-1},\ \varphi(t_{k-1})]||t-\bar{t}|$$

$$\leqslant M|t-\bar{t}|$$

容易看出，对于 $\bar{t}\in[t_m,\ t_{m+1}]$，$t\in[t_{m+l},t_{m+l+1}]$ $(m+l+1\leqslant n)$ 时，(3.5) 式也成立。特别地得出

$$|\varphi(t)-\varphi(t_{k-1})|\leqslant M|t-t_{k-1}|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

所以，由 (3.3)式可得

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}-f[t,\ \varphi(t)]\right|\leqslant|f[t_{k-1},\ \varphi(t_{k-1})]-f[t,\ \varphi(t)]|\leqslant\varepsilon.$$

以上表明，函数$\varphi(t)$满足定义 1 的全部条件。所以$\varphi(t)$是方程的ε—解。

为了建立存在性定理的证明，我们还需要提出一个重要的引理。为此，先阐述下面概念。

定义 2　设$F=\{f(t)\}$是定义在区间$[a,b]$上的函数族。如果存在一个常数$M>0$，使得F中的所有函数 $f(t)$，都满足$|f(t)|\leqslant M$，则称函数族F在$[a,\ b]$上是一致有界的。

定义 3　设$F=\{f(t)\}$是定义在区间$[a,b]$上的函数族。如果对于任意的$\varepsilon>0$，总存在着$\delta(\varepsilon)>0$，使得F中的所有函数$f(t)$，当t、$\bar{t}\in[a,\ b]$，$|t-\bar{t}|\leqslant\delta(\varepsilon)$时，都有

$$|f(t)-f(\bar{t})|<\varepsilon,$$

则称函数族下在$[a,\ b]$上是等度连续的。

引理 3　(**Ascoli-Arzela 引理**) 设$F=\{f(t)\}$是定义在有界区间$[a,b]$上的无限函数族，在区间$[a,b]$上一致有界且等度连续，则从F中必能选出一个在区间$[a,\ b]$上一致收敛的函数序列$\{f_n(t)\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$。

证明　因为函数族F是一致有界的，即存在常数$M>0$，使得每一$f(t)\in F$，都有$|f(t)|\leqslant M$，所以F中每一函数的图形完全位于矩形域R，

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad -M \leqslant x \leqslant M$$

的内部（图4—1），今取$\varepsilon_1 = \frac{M}{2}$，由于函数族$F$等度连续，所以对于$\varepsilon_1$，就存在$\delta_1(\varepsilon_1) > 0$。当$t$、$\bar{t} \in [a, b]$，$|t - \bar{t}| \leqslant \delta_1$时，对于任一$f(t) \in F$，都有

$$|f(t) - f(\bar{t})| < \varepsilon_1。$$

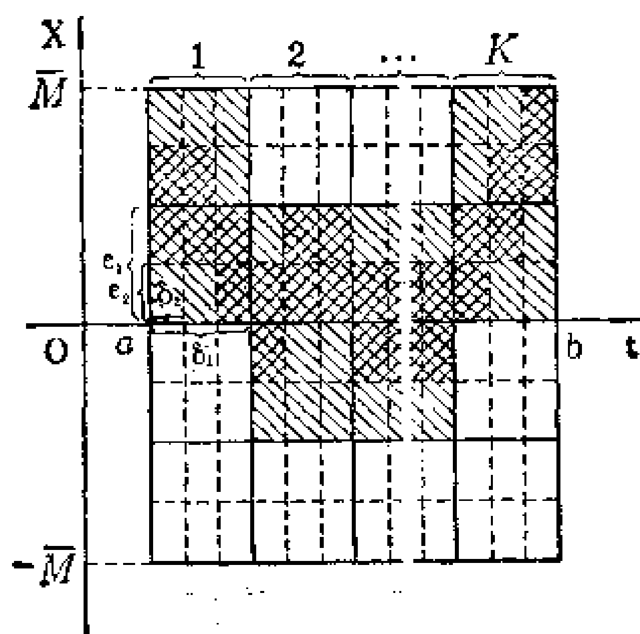


图4—1

我们用平行于坐标轴的直线，将矩形域R分成有限个高为ε_1宽为小于或等于δ_1的小矩形。根据ε_1和δ_1的选择，在那些以相邻二垂线为界的铅直长条上，函数族F中的每一个函数，它的图形最多只能经过每个长条中相邻的两个小矩形，而这样的小矩形对是有限的，F是无限函数族，于是在每个长条中，至少有一对相邻的小矩形内，有F的无限多个函数的图形通过。这样一来，我们就找出一个以折线为边界高为$2\varepsilon_1$的多边形，在此多边形内，含有F的无限多个函数的图形，记这些函数为$F_1 = \{f^{(1)}(t)\}$，它包含于F内，即$F_1 \subset F$。

对于函数族F_1，取$\varepsilon_2=\frac{M}{2^2}$，象前面一样，作同样的讨论，便得到无限函数族 $F_2=\{f^{(2)}(t)\}$包含于F_1内，即$F_2\subset F_1\subset F$。并且，对于任意$f_1^{(2)}(t)$、$f_2^{(2)}(t)\in F_2$，$t\in[a, b]$，都有

$$|f_1^{(2)}(t)-f_2^{(2)}(t)|\leqslant 2\varepsilon_2=\frac{M}{2}.$$

继续这样作下去，我们就得到函数族F_1，F_2，…，F_n，…，($F\supset F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$)，今从$F_1$中任取一个函数$f_1(t)$，从$F_2$中任取一个不同于$f_1(t)$的函数$f_2(t)$，…，从$F_n$中任取一个不同于$f_1(t)$，$f_2(t)$，…，$f_{n-1}(t)$的函数 $f_n(t)$，如此继续下去，最后我们就得到一个函数序列$\{f_n(t)\}(n=1, 2, \cdots)$。

按照以上的作法可知，对每一个正整数n，从$f_n(t)$开始后面的函数图形都包含在从折线为边界高为$2\varepsilon_n$的多边形内。因此，对于任意的自然数n和$l(l>n)$，$t\in[a, b]$，都有

$$|f_n(t)-f_{n+l}(t)|<2\varepsilon_n=\frac{M}{2^{n-1}}.$$

依据哥西收敛原理，它在有限区间$[a, b]$上一致收敛。

定理4.2 设在区域$R=\{(t, x): |t-t_0|\leqslant a, |x-x_0|\leqslant b\}$上，函数$f(t, x)$连续，则方程（3.1）在区间$|t-t_0|\leqslant h$上，至少存在一个解$\varphi(t)$，且满足初始条件$\varphi(t_0)=x_0$，其中$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$，$M=\max\limits_{R}|f(t, x)|$。

证明 我们考虑数列$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_n>\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，根据引理2，对于每个$\varepsilon_n$，方程（3.1）在区间$|t-t_0|\leqslant h$上存在$\varepsilon_n$一解$\varphi_n(t)$，而且$\varphi_n(t_0)=x_0$，于是我们得到函数序列：

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t), \cdots.$$

因为对于任何n，t，$\bar{t}\in[t_0-h,\ t_0+h]$，由(3.5) 式有

$$|\varphi_n(t)-\varphi_n(\bar{t})|\leqslant M|t-\bar{t}| \tag{3.6}$$

让$\bar{t}=t_0$，就得到

$$|\varphi_n(t)|\leqslant x_0+Mh.$$

所以函数序列$\{\varphi_n(t)\}$在$|t-t_0|\leqslant h$ 上是一致有界的．其次，序列$\{\varphi_n(t)\}$也是等度连续的，因为对于$\varepsilon>0$，选取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，那么由(3.6) 式，当$|t-\bar{t}|<\delta(\varepsilon)$时，对任意的$n$都有

$$|\varphi_n(t)-\varphi_n(\bar{t})|<\varepsilon.$$

因此，根据引理3，从序列$\{\varphi_n(t)\}$中可选出在区间$|t-t_0|\leqslant h$上一致收敛的子序列：

$$\varphi_{n_1}(t),\ \varphi_{n_2}(t),\ \cdots,\ \varphi_{n_k}(t)\cdots.$$

设序列$\{\varphi_{n_k}(t)\}$ 的极限函数是$\varphi(t)$，显然，$\varphi(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上连续，且满足初始条件$\varphi(t_0)=x_0$。

现在来证明，函数$x=\varphi(t)$就是方程(3.1) 的一个解．事实上，由于$\varphi_n(t)$是方程(3.1) 的ε_n一解，因此，当$|t-t_0|\leqslant h$时，有

$$\begin{cases}\Delta_n(t)=\dfrac{d\varphi_n}{dt}-f(t,\varphi_n(t)), & \text{在}\dfrac{d\varphi_n}{dt}\text{存在且连续的}t\text{值上；}\\ \Delta_n(t)=0, & \text{在}|t-t_0|\leqslant h\text{的其它点上。}\end{cases} \tag{3.7}$$

而$|\Delta_n(t)|\leqslant\varepsilon$，注意到$\varphi_n(t_0)=x_0$由上可得

$$\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s\cdot\varphi_n(s))ds+\int_{t_0}^{t}\Delta_n(s)\,ds,$$

特别地有

$$\varphi_{n_k}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi_{n_k}(s))ds+\int_{t_0}^{t}\Delta_{n_k}(s)ds, \qquad (3.8)$$

让$n\to\infty$，对(3.8)的两端取极限，注意到$f(t,\ x)$的一致连续性及序列$\{\varphi_{n_k}(t)\}$的一致收敛性，便得到

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi(s))ds, \qquad (3.9)$$

而$\lim\limits_{k\to 0}\int_{t_0}^{t}\Delta_{n_k}(s)ds=0$是由$|\Delta_{n_k}(t)|\leqslant\varepsilon_{n_k}$与$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_{n_k}=0$推得的。根据引理1，$\varphi(t)$既然是积分方程满足$\varphi(t_0)=x_0$的连续解，它也是始值问题（3.1）、（3.2）的解，从而定理2获证。

许多例子表明，对于方程(3.1)，如果仅假定右端函数$f(t,x)$在区域D内连续，就不可能保证解的唯一性，例如始值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{x},\ (x\geqslant 0)\\ x(0)=0,\end{cases}$$

而区域D是在上半平面内，方程的右端函数在D内连续，可是$x=0$和$x=\dfrac{t^2}{4}$（$t\geqslant 0$）都是满足初始条件的解。因此，要保证始值问题的解的唯一性，还必须给右端函数$f(t,\ x)$再增加条件。关于这方面，有着各种各样的条件，下面给出一个简单的结果。

定理4.3 设函数$f(t,\ x)$在$(t,\ x)$平面上某区域D内连续，并且关于x是单调非增的，则方程（3.1）最多有一个满足初始条件(3.2)的解。

证明 设方程（3.1）有两个满足条件（3.2）的解$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$。由于函数$f(t,\ x)$的单值性，因而$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$的图形不能相互穿过，于是不妨设

$$\varphi_1(t)\geqslant\varphi_2(t),$$

记

$$\sigma(t)=[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]^2\geqslant 0 \tag{3.10}$$

我们有

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}=2[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]\left[\frac{d\varphi_1}{dt}-\frac{d\varphi_2}{dt}\right]$$

$$=2[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)][f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)]\leqslant 0$$

由于$\sigma(t_0)=0$，这样对于$t\geqslant t_0$，将有

$$\sigma(t)\leqslant 0. \tag{3.11}$$

由(3.10)、(3.11) 得到

$$\sigma(t)=0,$$

即$\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)$从而定理获证。

§4* 解的延拓

从定理4.1与定理4.2可看到，始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x) & (4.1)\\ x(t_0)=x_0 & (4.2)\end{cases}$$

的解的存在区间是$[t_0-h,\ t_0+h]$，其中$h=\min\left(a,\ \dfrac{b}{m}\right)$.显然，如果$M=\max|f(t,\ x)|$相当地大，那么，$h$将相当地小。这表明解的存在区间很小。然而，能否将解的存在区间尽可能地扩大呢？我们先看一个例子。设在区域$R=\{(t,x): -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}, -l\leqslant x\leqslant l\}$上考察始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+x^2,\\ x(0)=0,\end{cases}$$

这里，$M=\max(1+x^2)=1+l^2$，$a=\dfrac{\pi}{2}$，$b=l$，从而$h=\min\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{l}{1+l^2}\right)=\dfrac{l}{1+l^2}<1$，根据定理1，解的存在区间是$\left[-\dfrac{l}{1+l^2},\dfrac{l}{1+l^2}\right]$。又从初等积分法可得：

$$\int_0^x \frac{ds}{1+s^2}=\int_0^t ds,\quad x=\operatorname{tg} t.$$

而解$x(t)=\operatorname{tg} t$在$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$内存在，这里$\left[-\dfrac{l}{1+l^2},\dfrac{l}{1+l^2}\right]\subset\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。此例表明，由定理1所确定的解的存在区间是可能扩大的，即是说，积分曲线是可以延拓的。这就是我们本节要讨论的问题。

设在(t,x)平面上有界区域D内，始值问题（4.1）（4.2）的解存在且唯一，对$f(t_0,x_0)\in D$，选取完全包含于D内，以(t_0,x_0)为中心的矩形域R，由定理4.1，可定出h_0，使始值问题在区间$[t_0-h_0,t_0+h_0]$上存在解$\varphi_1(t)$。记$t_0+h_0=t_2$，显然$(t_2,\varphi_1(t_2-0))\in D$，因此，满足方程(4.1)和初始条件

$$x(t_2)=\varphi_1(t_2-0)=x_2 \tag{4.3}$$

的解$\varphi_2(t)$将在$[t_2-h_2,t_2+h_2]$（$h_2>0$）上存在，那么依据解的唯一性，在区间$[t_0-h_0,t_2]$与$[t_2-h_2,t_2+h_2]$的公共部分上，应有$\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)$。如果定义

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_1(t) & t\in[t_0-h_0,t_2]\\ \varphi_2(t) & t\in[t_2,t_2-h_2]\end{cases}$$

则不难证明，函数$x=\varphi(t)$将是始值问题(4.1)（4.2）在区间$[t_0-h_0,t_2+h_2]$上的解。这样，便把解$\varphi_1(t)$的存在区间往右

延拓了。同样地，也可以往左延拓(图4—2)。只要由区间端点和解在此端点的（极限）值所决定的点位于区域D的内部，这种方法就可继续下去。

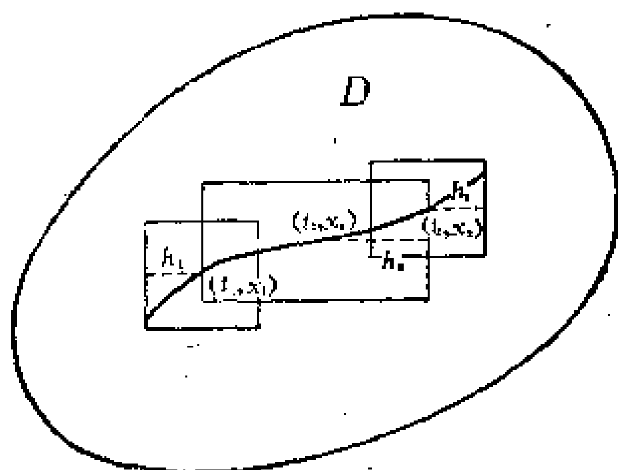


图4—2

最后，可以得到解的最大存在区间。很明显，解的最大存在区间，必定是开区间。

定理4.4 设D是 (t, x) 平面上有界区域，函数$x=\varphi(t)$是始值问题 (4.1) (4.2) 在D内的唯一解，它的最大存在区间为(c, d)，则当$t\to d-0$ (或$t\to c+0$)时，有

$$\rho[(t, \varphi(t)), \partial D]\to 0 \tag{4.4}$$

其中，∂D表示有界区域D的边界，$\rho[(t, \varphi(t)),\partial D]$表示点$(t, \varphi(t))$到$\partial D$的距离。

证明 设当$x\to d-0$时，(4.4) 不成立。那么必存在正数ρ_0，及趋于d的单调递增序列$\{t_k\}$ $(k=1, 2, \cdots.)$ 使得

$$\rho[(t_k, \varphi(t_k)), \partial D]\geqslant\rho_0. \tag{4.5}$$

因为诸点 $(t_k, \varphi(t_k))\in D$，从而点列$\{t_k, \varphi(t_k)\}$有界，依据众所周知的聚点原理，必存在收敛的子列。为简便起见，不妨设就是该点列本身。

于是有

$$(t_k,\ \varphi(t_k))\to(\bar{t},\ \bar{x}),\ (k\to+\infty)$$

显然$\bar{t}=d$。由(4.5)推知，极限点$(\bar{t},\ \bar{x})$是D的内点．于是我们能够以$(\bar{t},\ \bar{x})$为中心，作矩形域$\bar{R}=\{(t,\ x):\ |t-\bar{t}|\leqslant\alpha,|x-\bar{x}|\leqslant\beta\}$，便得$\bar{R}\subset D$；设$M=\max\limits_{\bar{R}}|f(t,\ x)|$，并且恒可使

$$\alpha<\frac{\beta}{4M}. \tag{4.6}$$

再在$\bar{R}$内取小矩形域$R_1=\left\{(t,\ x):\ \bar{t}-\alpha\leqslant t\leqslant\bar{t},\ \bar{x}-\frac{\beta}{2}\leqslant x\leqslant\bar{x}+\frac{\beta}{2}\right\}$（图4—3中阴影部分），由于点列$\{t_k,\ \varphi(t_k)\}$收敛于$(\bar{t},\ \bar{x})$，所以存在正整数$n$，使得$(t_n,\ \varphi(t_n))\in R_1$。现在把定理4.1应用于点$(t_n,\ \varphi(t_n))$，即用点$(t_n,\varphi(t_n))$代替定理4.1中的点$(t_0,\ x_0)$，并取该点定理中的$a$和$b$为

$$a=\bar{t}+\alpha-t_n,\quad b=\frac{\beta}{2}.$$

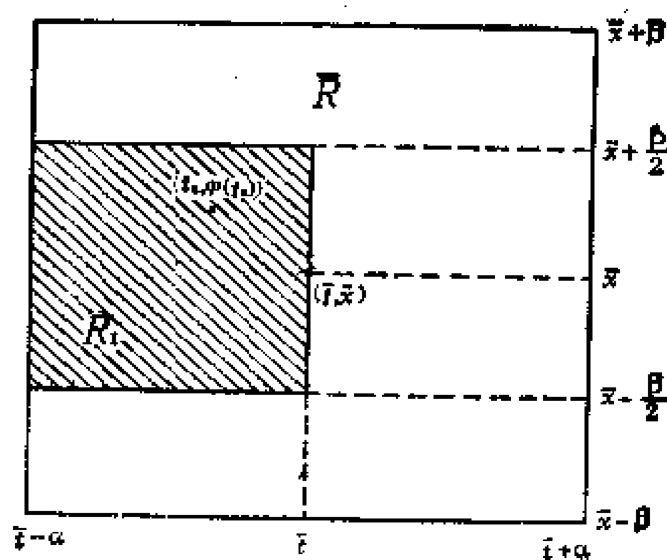


图4—3

于是，方程(4.1)必在区间$[t_n, t_n+h]$上存在满足初始条件$x(t_n)=\varphi(t_n)$的解，这里，$h=\min\left(\bar{t}+\alpha-t_n, \frac{\beta}{2}/M\right)$。由于(4.6)及$\bar{t}+\alpha-t_n\leqslant 2\alpha<2\frac{\beta}{4M}=\frac{\beta}{2M}$，所以$h=\bar{t}+\alpha-t_n$。则$t_n+h=t_n+\bar{t}+\alpha-t_n=\bar{t}+\alpha=d+\alpha>d$；这表明解$x=\varphi(t)$还可延拓到$t=d$的右侧。这便与所设$(c, d)$是解的最大存在区间相矛盾，故(4.4)成立。

这个定理表明，位于有界区域D内的积分曲线，可以延拓到任意接近区域D的边界。

当D是无界区域的情形，可在D的任意有界子区域上应用定理4.4作为推广的情形，这时可能有$c=-\infty$或$d=+\infty$或$c=-\infty$与$d=+\infty$等情形。可以看出，位于D内的积分曲线，或者趋于D的边界或者趋于无穷。

例1 设区域D是(t, x)平面，试讨论始值问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x^2,\\ x(0)=1\end{cases}$$

的解的延拓情况。

解 我们在区域D的任一子区域$D_A=\{(t, x), -\infty<t<+\infty, -A\leqslant x\leqslant A\}$上考察问题，其中$A$是任意正数。问题的解是$\varphi(t)=\frac{1}{1-t}$，它的存在区间是$-\infty<t<1-\frac{1}{A}$。由于$A$的任意性，所以$\varphi(t)$可以延拓到$-\infty<t<1$内，但不能延拓到$-\infty<t\leqslant 1$上。显然，当$t\to 1-0$时，$\varphi(t)\to+\infty$。

上例表明，虽然方程的右端函数在(t, x)平面上连续，但始值问题的解并不能延拓到区间$(-\infty, 1]$上，更不用说是整个

t轴上了。当然对于定理4.4的结论，就应按推广的意义来理解了。

§5* 解对初值的连续性与可微性

在前面各章节中，我们研究始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,\ x), & (5.1)\\ x(t_0)=x_0 & (5.2)\end{cases}$$

时，总是把初始数据t_0、x_0视为固定的，然后再去讨论方程(5.1)满足条件(5.2)的解，这个解只是变量t的函数。可以想到，若使初始数据t_0、x_0变动时，对应的解自然也会随着变动，这时方程(5.1)的解还依赖于t_0、x_0。例如，对于$f(t,\ x)=x$时，满足条件(5.2)的解为$x(t)=x_0e^{t-t_0}$，它就是自变量t和初始数据t_0、x_0的函数，而且连续依赖着t和t_0、x_0。

为了明确解所满足的初始条件，今后，我们常把始值问题(5.1)、(5.2)的解$x=\varphi(t)$记为

$$x=\varphi(t,\ t_0,\ x_0);$$

因而有 $x_0=\varphi(t_0,\ t_0,\ x_0)$。

我们知道，有关微分方程的定解问题的形成，都是依赖着一定的实际背景。从实际问题中提出它的数学模型，其初始条件都是由实验测定的。实验中的测量自然会有误差。这样由初始数据的微小误差而引起解的变化问题，就愈来愈引起了人们的重视。设想测定x_0时，即使误差很小，如果引起微分方程的解的变化却相当大，那么这样的解在实用上就值得认真考虑了。

众所周知，我们总是希望，当t_0、x_0有微小变动时，方程的

解也相应地只有微小的变动. 同时，还要进一步研究解对初始数据的变化率问题。在讨论这些问题之前，先证明一个很有用的不等式。

引理4 设$\varphi(t)$与$f(t)$是区间$[t_0, t_1]$上的非负连续函数，并且满足

$$\varphi(t)\leqslant M+K\int_{t_0}^{t}\varphi(s)f(s)ds \tag{5.3}$$

其中M、K是正常数，则在区间$[t_0, t_1]$上，不等式

$$\varphi(t)\leqslant Me^{K\int_{t_0}^{t}f(s)ds} \tag{5.4}$$

成立，

证明 对于$t\in[t_0, t_1]$时，令

$$V(t)=M+K\int_{t_1}^{t}\varphi(s)f(s)\,ds$$

于是$V(t_0)=M$及$\varphi(t)\leqslant V(t)$；又

$$\frac{dV(t)}{dt}=K\varphi(t)f(t),$$

根据假设$f(t)$非负，从而得到

$$\frac{dV}{dt}\leqslant KV(t)f(t).$$

将上面不等式两端乘以$e^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)ds}$，并注意到恒等式：

$$\frac{dV}{dt}e^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)ds}-KV(t)f(t)e^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)ds}$$
$$=\frac{d}{dt}\left[V(t)e^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)ds}\right]$$

便得到

$$\frac{d}{dt}\left[V(t)e^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)ds}\right]\leqslant 0.$$

从t_0到t进行积分，得到

$$V(t)e^{-K\int_{t_0}^{t} f(s)ds} - V(t_0) \leqslant 0,$$

即 $$V(t) \leqslant Me^{K\int_{t_0}^{t} f(s)ds}.$$

这就是著名的Gronwall—Bellman不等式。

顺便指出，如果$M=0$时，则从不等式(5.4) 得知$\varphi(t)\equiv 0$，利用它证明解的唯一性更为方便。

定理4.5 设D是(t, x) 平面上的区域，$f(t, x)$在D内连续且满足李普希茨条件。又设$\psi(t)$是方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{5.1}$$

在区间 $[a, b]$ 上有定义的一个解。则存在$\delta>0$，使得对于任意$(t_0, x_0)\in V\subset D$，而

$$U: \quad a\leqslant t_0 \leqslant b, \quad |x_0-\psi(t_0)|\leqslant\delta, \tag{5.5}$$

方程(5.1) 存在唯一解$x=\varphi(t, t_0, x_0)$ 使$\varphi(t_0, t_0, x_0)=x_0$并且也在区间$[a, b]$上有定义。

其次，在区域

$$V: \quad a\leqslant t\leqslant b, \quad a\leqslant t_0\leqslant b, \quad |x_0-\psi(t_0)|\leqslant\delta \tag{5.6}$$

内$\varphi(t, t_0, x_0)$ 关于其全部变量t、t_0、x_0是连续的。

证明 选取$\delta_1>0$使得区域

$$U_1: \quad a\leqslant t\leqslant b, \quad |x-\psi(t)|\leqslant\delta_1$$

位于D内。再选取$\delta>0$使得

$$\delta<e^{-L(b-a)}\delta_1, \tag{5.7}$$

其中L是李普希茨常数。按上述选取的δ，确定出区域U。

现在利用逐步逼近法证明定理的结论。

对于$(t_0, x_0)\in U$，考虑积分方程

$$x(t,t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s,t_0,x_0))ds \tag{5.8}$$

今选取零次近似：

$$\varphi_0(t, t_0, x_0)=\psi(t)+x_0-\psi(t_0) \tag{5.9}$$

以及逐次近似：

$$\varphi_{n+1}(t,t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s, \varphi_n(s,t_0,x_0))ds \tag{5.10}$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots.)$$

可以证明：当$(t_0, x_0)\in U$，$t\in[a, b]$即$(t, t_0, x_0)\in V$时，将有$(t, \varphi_n(t, t_0, x_0))\in U_1$，并且$\varphi_n(t, t_0, x_0)$在$V$内连续，以及满足估计式

$$|\varphi_{n+1}(t, t_0, x_0)-\varphi_n(t, t_0, x_0)|$$
$$\leqslant\frac{L^{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}|x_0-\psi(t_0)| \tag{5.11}$$

利用数学归纳法，当$n=0$时，对于$(t, t_0, x_0)\in V$，由

$$|\varphi_0(t, t_0, x_0)-\psi(t)|=|x_0-\psi(t_0)|<\delta<\delta_1$$

表明$(t, \varphi_0(t, t_0, x_0))\in U_1$，并且$\varphi_0(t, t_0, x_0)$在$V$内连续，$\varphi_0(t_0, t_0, x_0)=x_0$.

依据所设，$\psi(t)$是方程(5.1)在$[a, b]$上的解，于是

$$\psi(t)=\psi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s, \psi(s))ds. \tag{5.12}$$

从而有

$$|\varphi_1(t,t_0,x_0)-\psi(t)|=|x_0+\int_{t_0}^{t}f(s, \varphi_0(s,t_0,x_0))ds$$
$$-\psi(t_0)-\int_{t_0}^{t}f(s,\psi(s))ds|$$
$$\leqslant|x_0-\psi(t_0)|+\left|\int_{t_0}^{t}|f(s, \varphi_0(s,t_0,x_0))\right.$$

$$-f(s,\ \psi(s))|ds\Big|$$

$$\leqslant|x_0-\psi(t_0)|+L\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_0(s,t_0,x_0)-\psi(s)|ds\right|$$

$$=|x_0-\psi(t_0)|+L\left|\int_{t_0}^{t}|x_0-\psi(t_0)|ds\right|$$

$$=(1+L|t-t_0|)|x_0-\psi(t_0)|<e^{L(b-a)}\delta<\delta_1.$$

这表明$(t,\ \varphi_1(t,t_0,x_0))\in U_1$，且由$\varphi_0$在$V$内连续和（5.10)式可推知$\varphi_1$在$V$内也连续，$\varphi_1(t_0,\ t_0,\ x_0)=x_0$。

其次有估计式

$$|\varphi_1(t,\ t_0,\ x_0)-\varphi_0(t,\ t_0,\ x_0)|$$

$$=\left|x_0+\int_{t_0}^{t}f(s),\ \varphi_0(s,t_0,x_0)ds-(\psi(t)+x_0-\psi(t_0))\right|$$

$$=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\ \varphi_0(s,t_0,x_0))-f(s,\ \psi(s))]ds\right|$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_0(t,t_0,x_0)-\psi(s)|ds\right|$$

$$=L\left|\int_{t_0}^{t}x_0-\psi(t_0)\right|ds$$

$$\leqslant L|t-t_0||x_0-\psi(t_0)|$$

即（5.11）式成立。

今设$n\leqslant k$时论断成立，证明$n=k+1$时，论断也成立。

事实上，从归纳假设，以及

$$|\varphi_k(t,\ t_0,\ x_0)-\psi(t)|$$

$$\leqslant|\varphi_k-\varphi_{k-1}|+|\varphi_{k-1}-\varphi_{k-2}|+\cdots+|\varphi_1-\psi|$$

$$\leqslant\left[\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!}+\frac{L^{k-1}|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots+L|t-t_0|\right.$$

$$\left.+1\right]|x_0-\psi(t_0)|$$

可得

$$|\varphi_{k+1}(t,t_0,x_0)-\psi(t)|\leqslant|x_0-\psi(t_0)|$$

$$+\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_k(s,t_0,x_0))-f(s\psi(s))|ds\right|$$

$$\leqslant|x_0-\psi(t_0)|+L\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_k(s,t_0,x_0)-\psi(s)|ds\right|$$

$$\leqslant|x_0-\psi(t_0)|+\left[\frac{L^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{L^2|t-t_0|^2}{2!}+L|t-t_0|+1\right]|x_0-\psi(t_0)|$$

$$\leqslant e^{L(b-a)}\delta<\delta_1.$$

这表明$(t,\varphi_{k+1}(t,t_0,x_0))\in U_1$，且$\varphi_{k+1}$在$V$内连续，$\varphi_{k+1}(t_0,t_0,x_0)=x_0$。

又

$$|\varphi_{k+1}(t,t_0,x_0)-\varphi_k(t,t_0,x_0)|$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_k(s,t_0,x_0)-\varphi_{k-1}(s,t_0,x_0)|ds\right|$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{L^k|s-t_0|^k}{k!}|x_0-\psi(t_0)|ds\right|$$

$$=\frac{L^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}|x_0-\psi(t_0)|$$

即(5.11)式成立。

所以对一切整数n，论断成立，利用本章定理4.1证明过程中关于证明近似序列一致收敛的方法，同样地可证序列$\{\varphi_n(t,t_0,x_0)\}$在V内一致收敛，它的极限函数$\varphi(t,t_0,x_0)$是积分方程(5.8)的连续解，就是满足

$$\varphi(t,t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds$$

且关于t, t_0, x_0是连续的。

由上即可得出$\varphi(t, t_0, x_0)$是方程(5.1)在$[a, b]$上的解，并且满足条件$\varphi(t_0, t_0, x_0)=x_0$。

推论 在定理5的假设下，如果解$x=\varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)$ $(a\leqslant\bar{t}_0\leqslant b)$在$[a, b]$上有定义，那么当$(t_0, x_0)(a\leqslant t_0\leqslant b)$充分邻近$(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$时，解$\varphi(t, t_0, x_0)$也至少在$[a, b]$上有定义，而且当$(t_0, x_0)\to(t_0, \bar{x}_0)$时，在$[a, b]$上一致地有

$$\varphi(t, t_0, x_0)\to\varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)。$$

定理4.6 设在(t, x)平面上的区域D内，函数$f(t, x)$连续，且关于x有连续偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$，则方程(5.1)的解$x=\varphi(t, t_0, x_0)$作为$t$、$t_0$、$x_0$的函数，在它存在的区域内是连续可微的。

证明 考虑到定理4.5的证明，我们可以在定理4.5中的区域V内讨论。我们需要证明在V内：

a) $\dfrac{\partial\varphi(t, t_0, x_0)}{\partial t}$ 存在且连续；

b) $\dfrac{\partial\varphi(t, t_0, x_0)}{\partial x_0}$ 存在且连续；

c) $\dfrac{\partial\varphi(t, t_0, x_0)}{\partial t_0}$ 存在且连续。

首先证明a)，因为$\varphi(t, t_0, x_0)$作为t的函数是方程(5.1)的解，所以有

$$\frac{\partial\varphi(t, t_0, x_0)}{\partial t}=f(t, \varphi(t, t_0, x_0))。\tag{5.13}$$

根据$f(t, x)$和$\varphi(t, t_0, x_0)$的连续性，从(5.13)可立即推知

$\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t}$存在且连续。

其次证明b)：我们从导数的定义出发，如果差商

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}=\frac{\varphi(t,t_0,x_0+\Delta x_0)-\varphi(t,t_0,x_0)}{\Delta x_0},$$

当$\Delta x_0\to 0$时，它的极限存在且连续，那么就可得到结论。为此，不妨形式地将(5.13)两端对x_0求偏导数，并交换左端求导数次序，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}\right)=f_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}.$$

设想$\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}$如果存在，它应当是一阶线性方程

$$\frac{du}{dt}=f_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))u \tag{5.14}$$

的解。由于

$$\varphi(t_0,t_0,x_0+\Delta x_0)=x_0+\Delta x_0,\ \varphi(t_0,t_0,x_0)=x_0.$$

因此，当$t=t_0$时，差商

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}=1.$$

这表明作为方程(5.13)的解，还应当满足初始条件

$$u(t_0)=1. \tag{5.15}$$

基于上面的分析，在区域V内，要证明极限$\lim\limits_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}$存在且连续，只须证明差商的极限正好是始值问题

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}=f_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))u\\ u(t_0)=1\end{cases}$$

的解$u(t)$，即

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}=u(t,t_0,1),\tag{5.16}$$

而线性方程的解在区域V内存在且连续。

为此，设(t,t_0,x_0)、$(t,t_0,x_0+\Delta x_0)\in V$，
于是

$$\varphi(t,t_0,x_0+\Delta x_0)=x_0+\Delta x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s,t_0,x_0+\Delta x_0))ds$$

$$\varphi(t,t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds,$$

两式相减，并利用所设$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\varphi$的连续性，得到

$$\Delta\varphi=\Delta x_0+\int_{t_0}^{t}[f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))+\gamma]\Delta\varphi ds$$

从而有

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}=1+\int_{t_0}^{t}[f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0)+\gamma]\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}ds\tag{5.17}$$

其中γ与t、t_0、x_0、Δx_0有关。对于$a\leqslant t\leqslant b$(参见定理4.15推论)，当$\Delta x_0\to 0$时，一致地有

$$\gamma\to 0.\tag{5.18}$$

又从始值问题(5.14) (5.15)推得

$$u(t,t_0,1)=1+\int_{t_0}^{t}f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))u(s,t_0,1)ds,\tag{5.19}$$

于是

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u=\int_{t_0}^{t}[(f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0 1)+\gamma)\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-\right.$$

$$-u\Big)+\gamma u]ds.$$

当$t_0\leqslant t\leqslant b$时,

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}[|f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))+\gamma|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u\right|$$

$$+|\gamma||u|]ds.$$

注意到f_x及始值问题(5.14) (5.15)的解 u 在区间$[a,b]$上的连续性，因而存在常数$K_1>0$和$K_2>0$，使得$|f_x|\leqslant K_1$，$|u|\leqslant K_2$；再据 (5.18) 可知，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当$\Delta x_0<\delta(\varepsilon)$时，有

$$|\gamma|<\varepsilon.$$

由上可得

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}\left[(K_1+\varepsilon)\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u\right|+\varepsilon K_2\right]ds$$

$$\leqslant\varepsilon K_2(b-a)+(K_1+\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\Delta u}{\Delta x_0}-u\right|ds$$

根据引理4，得到

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u\right|\leqslant\varepsilon K_2(b-a)e^{(K_1+\varepsilon)(t-t_0)} \tag{5.20}$$

$$\leqslant\varepsilon K_2(b-a)e^{(K_1+\varepsilon)(b-a)}.$$

对于$a\leqslant t\leqslant t_0$可作类似讨论。于是对于$a\leqslant t\leqslant b$(5.20)成立。所以当$\Delta x_0\to 0$时，一致地有

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}-u\right|\to 0.$$

即$\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}$存在且连续，且与$u(t,t_0,1)$一致。

类似地可以证明c)成立。$\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}$ 将仍是线性方程(5.14)的解，只是满足初始条件：

$$u(t_0)=-f(t_0,x_0) \tag{5.21}$$

关于(5.21)可推导如下：当$t=t_0$时，

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t_0}=\frac{\varphi(t_0,t_0+\Delta t_0,x_0)-\varphi(t_0,t_0,x_0)}{\Delta t_0}$$

$$=\frac{\varphi(t_0,t_0+\Delta t_0,x_0)-\varphi(t_0+\Delta t_0,t_0+\Delta t_0,x_0)}{\Delta t_0}$$

$$=-\frac{1}{\Delta t_0}\int_{\Delta t_0}^{t_0+\Delta t_0}d\varphi(s,t_0+\Delta t_0,x_0)$$

$$=-\frac{1}{\Delta t_0}\int_{\Delta t_0}^{\Delta t_0+t_0}f(s,\varphi(s,t_0+\Delta t_0,x_0))ds.$$

由于φ与f的连续性，当$\Delta t_0\to 0$时，便得

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}=-f(t_0,x_0).$$

定理获证。

利用一阶线性方程的求解公式，从定理4.6的证明，立即可得解对初值的微商公式：

$$\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}=e^{\int_{t_0}^{t}f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds}, \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}=-f(t_0,x_0)e^{\int_{t_0}^{t}f_x(s,\varphi(s,t_0,x_0))ds}. \tag{5.23}$$

例1 已知方程为$\dfrac{dx}{dt}=\sin(tx)$，试求

$$\left.\frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{t_0=0\\x_0=0}},\quad \left.\frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}\right|_{\substack{t_0=0\\x_0=0}}.$$

解 因为方程的右端函数满足定理4.6的条件，也不难求得满足$x(0)=0$的方程的唯一解是$x\equiv 0$。

于是

$$\frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}\Big|_{\substack{t_0=0\\x_0=0}}=e^{\int_0^t s\cos 0\,ds}=e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}\Big|_{\substack{t_0=0\\x_0=0}}=-\sin 0\, e^{\int_0^t s\cos 0\,ds}=0。$$

习 题

1. 求下列始值问题的解的一次、二次近似：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+x^3,\\ x(1)=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=t^2-x^2,(|t+1|\leqslant 1,|x|\leqslant 1)\\ x(-1)=0。\end{cases}$

2. 求证定理1中始值问题的真解$\varphi(t)$与其k次近似$\varphi_k(t)$的误差，满足

$$|\varphi(t)-\varphi_k(t)|\leqslant\frac{ML^k}{(k+1)!}h^{k+1}e^{Lh}。$$

3. 求证 $f(t,x)=|x|$在$x=0$处$\dfrac{\partial f}{\partial x}$不存在，但李普希茨条件处处成立。

4. 设$u(t)$是$[t_0,t_0+a]$上非负连续函数，并且满足

$$u(t)\leqslant K\int_{t_0}^t u(s)ds,\quad (K为常数)$$

试利用定理1中的估计方法，证明在$[t_0,t_0+a]$上$u(t)\equiv 0$。

5. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内连续函数，且满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2|,$$

其中正常数$L<1$.试证明方程$x=f(x)$存在唯一解.

6. 设$u(t)$、$v(t)$、$w(t)$在区间$[t_0,t_0+a]$上连续， 又$W(t)>0$，并且满足不等式

$$u(t)\leqslant v(t)+\int_{t_0}^{t}w(s)u(s)ds.$$

证明在$[t_0,\ t_0+a]$上

$$u(t)\leqslant v(t)+\int_{t_0}^{t}w(s)V(s)e^{\int_s^t W(\tau)d\tau}ds$$

成立.

其次，如果$v(t)$在$[t_0,t_0+a]$上还是非负单调不减函数，则在$[t_0,t_0+a]$上

$$u(t)\leqslant v(t)e^{\int_{t_0}^{t}W(s)ds}$$

成立.

7. 设$u(t)$、$v(t)$在$[t_0,t_0+a]$上连续，且满足

$$u(t)\leqslant u(t_0)+\int_{t_0}^{t}[Ku(s)+v(s)]ds,$$

其中K是正常数.证明在$[t_0,t_0+a]$上

$$u(t)\leqslant u(t_0)e^{K(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}v(s)e^{K(t-s)}ds$$

成立.

8. 设$f(t,x)$关于t和x是连续可微的，又$x=\varphi(t,t_0,x_0)$是方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$的解，证明恒等式

$$\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}+\frac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}\equiv 0.$$

9. 设函数$f_1(t,x)$与$f_2(t,x)$在平面上某区域D内连续，且满足

$$f_1(t,x)<f_2(t,x),$$

又设$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$分别是始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \text{与} \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_2(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \quad [(t_0,x_0)\in D]$$

的解，那么

当$t>t_0$时，在$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$都有定义的区间上，满足 $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)$；

当$t<t_0$时，在$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$都有定义的区间上，满足$\varphi_1(t)>\varphi_2(t)$。

10．设$f(t,x)$在平面区域R：

$$|t-t_0|\leqslant a,\quad |x-x_0|\leqslant b$$

上连续，又设$x=\varphi_m(t)$与$x=\psi_m(t)$分别是始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)+\varepsilon_m\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \text{与} \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)-\varepsilon_m\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解（$|t-t_0|\leqslant h$），其中$\varepsilon_m>0$；且当$m\to\infty$时，ε_m单调地趋于零.证明：

(1) 当$m\to\infty$时，$\varphi_m(t)$与$\psi_m(t)$分别趋于始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解$\Phi(t)$与$\Psi(t)$；

(2) $x=\Phi(t)$与$x=\Psi(t)$分别是方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$在$[t_0,t_0+h]$上的最大解与最小解，就是对于

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的任一解$\varphi(t)$，不等式

$$\varphi(t)\leqslant\Phi(t),\quad \varphi(t)\geqslant\Psi(t)$$

在φ、Φ、Ψ有定义的区间上都成立。

(3) $x=\Phi(t)$与$x=\Psi(t)$分别是方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$在$[t_0-h,t_0]$上的最小解与最大解，就是对于

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的任一解$\varphi(t)$，不等式

$$\varphi(t)\geqslant\Phi(t),\quad \varphi(t)\leqslant\Psi(t)$$

在φ, Φ, Ψ有定义的区间上都成立。

第五章* 边值问题

§1 引　　言

前几章中我们已经讨论了常微分方程的始值问题。在生产实际中，还提出了另一类定解问题，即本章要讨论的边值问题。在这一章中，我们主要介绍二阶线性方程的边值问题。

对于二阶微分方程

$$x''(t)=f(t,x,x'), \tag{1.1}$$

其中函数$f(t,x,x')$是已知的。设定义解的区间为$I=[a,b]$，通常我们把在区间I的两个端点处所给的定解条件，例如

$$x(a)=\alpha,\ \ x(b)=\beta \tag{1.2}$$

叫做边界条件。把求方程(1.1)满足边界条件(1.2)的解的定解问题，叫做边值问题。我们知道，(1.1)的始值问题要求的是在定义解的区间内自变量一个值处满足两个条件；而边值问题要求的却是在定义解的区间的两个端点处各满足一个条件。下面以一个最简单的二阶方程为例，来说明我们要讨论的问题。

在区间$I=[0,1]$上考虑边值问题

$$\begin{cases}x''(t)=0; & (1.3)\\ x(0)=1,x(1)=2. & (1.4)\end{cases}$$

已知(1.3)的通解为

$$x(t)=c_1+c_2t$$

由边界条件(1.4)，得到

$$x(0)=c_1+c_2\cdot 0=1,$$

$$x(1)=c_1+c_2\cdot 1=2.$$

求出$c_1=1$，$c_2=1$。从而得到边值问题(1.3)，(1.4)的解为

$$x(t)=1+t,\quad t\in[0,1].$$

通过直接验证，可知函数$x(t)=1+t$是满足方程(1.3)和边界条件(1.4)的。这里可以看出，定解条件与定义解的区间的两个端点值有关。

常微分方程的边值问题，最初是在考察数学物理的经典问题时提出的，进而在科学技术中也经常遇到。如：

研究河渠中的流体流动时，就遇到边值问题

$$\begin{cases}(p(t)x')'+\lambda x=1, & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ x'(0)=x(1)=0;\end{cases}$$

考察均匀杆受到轴向力时，研究杆的弯曲规律提出了边值问题

$$\begin{cases}x''+\lambda x=0, & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ x(0)=x(1)=0;\end{cases}$$

在化学反应理论中，提出边值问题

$$\begin{cases}\beta\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}+F(x)=0, & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ -x'(0)+ax(0)=0,\quad x(1)=0\end{cases}$$

讨论过两定点的悬链线时，提出了边值问题

$$\begin{cases}y''=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}, & (a\leqslant x\leqslant b)\\ y(a)=A\quad y(b)=B;\end{cases}$$

研究单粒子一维势阱运动规律时，提出了边值问题

$$\begin{cases}x''+\dfrac{2m}{h^2}x=0, & (0\leqslant t\leqslant a)\\ x(0)=x(a)=0.\end{cases}$$

以上提出的边值问题，大致上可分为两类：一类是所考虑的方程及边界条件中至少有一个是非线性的，这类边值问题叫做非线性边值问题；另一类是所考虑的方程及边界条件都是线性的，这类边值问题叫做线性边值问题。前面已经说过，我们考虑的主要是线性边值问题。

一个含有参数的二阶线性方程的一般形状为

$$p_0(t)x''+p_1(t)x'+[p_2(t)+\lambda p_3(t)]x=f(t); \quad (1.5)$$

而与(1.5)对应的线性齐次方程为

$$p_0(t)x''+p_1(t)x'+[p_2(t)+\lambda p_3(t)]x=0, \quad (1.6)$$

其中λ是参数。$p_i(t)\in C^{2-i}(I)$ $(i=0,1,2)$，$p_3(t)$、$f(t)\in C(I)$。以后若无特别说明，我们总是认为这些条件是满足的。

方程(1.5)或(1.6)的线性边界条件，一般为

$$\begin{aligned} U_1(x)&\equiv\alpha_{11}x(a)+\alpha_{12}x'(a)+\beta_{11}x(b)+\beta_{12}x'(b)=r_1, \\ U_2(x)&\equiv\alpha_{21}x(a)+\alpha_{22}x'(a)+\beta_{21}x(b)+\beta_{22}x'(b)=r_2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中α_{ij}，β_{ij}，$r_i(i,j=1,2)$都是实常数。当$r_1=r_2=0$时，则有

$$\begin{aligned} U_1(x)&\equiv\alpha_{11}x(a)+\alpha_{12}x'(a)+\beta_{11}x(b)+\beta_{12}x'(b)=0, \\ U_2(x)&\equiv\alpha_{21}x(a)+\alpha_{22}x'(a)+\beta_{21}x(b)+\beta_{22}x'(b)=0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

显然，定义在I上的对任意一个连续可微函数$x(t)$，$U_1(x)$和$U_2(x)$都是确定的。我们称$U_1(x)$、$U_2(x)$为边界算子。容易验证，$U_1(x)$、$U_2(x)$关于$x(t)$、$x'(t)$是线性的，即有$U_1(c_1x_1+c_2x_2)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)$，$U_2(c_1x_1+c_2x_2)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)$。

由(1.5)和(1.7)组成的定解问题，叫做非齐次边值问题；由(1.5)和(1.8)或(1.6)和(1.7)组成的定解问题，叫做半齐次边值

问题；由(1.6)和(1.8)组成的定解问题，叫做齐次边值问题。常微分方程满足边界条件的解叫做边值问题的解。很明显，$x(t,\lambda)\equiv 0$是齐次边值问题的解，这个解称为平凡解；当齐次边值问题的解$x(t,\lambda)\not\equiv 0$时，就称为非平凡解。

例1 已知

$$x_1(t)=\cos t,\quad x_2(t)=\sin t,\quad t\in[0,\pi]$$

$$U_1(x)\equiv 2x(0)+3x'(0)+3x(\pi)+2x'(\pi),$$

$$U_2(x)\equiv 5x(0)+7x'(0)+7x(\pi)+5x'(\pi),$$

求$U_1(x_1)$、$U_1(x_2)$、$U_2(x_1)$、$U_2(x_2)$的值。

解 这里$\alpha_{11}=2$，$\alpha_{12}=3$，$\alpha_{21}=5$，$\alpha_{22}=7$，$\beta_{11}=3$，$\beta_{12}=2$，$\beta_{21}=7$，$\beta_{22}=5$，而

$$x_1(0)=1\quad x_1'(0)=0,\quad x_1(\pi)=-1,\quad x_1'(\pi)=0,$$

$$x_2(0)=0\quad x_2'(0)=1,\quad x_2(\pi)=0,\quad x_2'(\pi)=-1.$$

所以

$$U_1(x_1)=-1,\quad U_1(x_2)=1,$$

$$U_2(x_1)=-2,\quad U_2(x_2)=2.$$

在第三章中我们曾提到，二阶线性齐次方程的解族，构成一个线性空间.这个解族的基本解组中有且仅有两个线性无关的解，而任意两个线性无关的解均可取作这个线性空间的基。于是线性齐次方程的解（自然包括边值问题的解）都可用这个基来线性表出。即，若$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$是方程(1,6)的基本解组，则

$$x(t,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda)+c_2x_2(t,\lambda),$$

其中c_1，c_2是任意常数，是二阶线性齐次方程的通解。

一般说来，边值问题不管在理论上还是在实际问题中都比始值问题要复杂得多。这一点，后面我们将通过一些简单例子来说明。

§2 可解性定理

本节我们研究在什么条件下§1中提出的三类线性边值问题可解，即解存在且唯一。

定理5.1 设$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$是方程

$$p_0(t)x'' + p_1(t)x' + [p_2(t) + \lambda p_3(t)]x = 0 \qquad (2.1)$$

的基本解组，则由(2.1)及

$$\begin{aligned} U_1(x) &\equiv \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) + \beta_{11}x(b) \\ &\qquad + \beta_{12}x'(b) = r_1, \\ U_2(x) &\equiv \alpha_{21}x(a) + \alpha_{22}x'(a) + \beta_{21}x(b) \\ &\qquad + \beta_{22}x'(b) = r_2 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

组成的半齐次边值问题，存在唯一解的充要条件是：

$$\Delta = U_1(x_1)U_2(x_2) - U_1(x_2)U_2(x_1) \neq 0. \qquad (2.3)$$

证明 先证充分性。由于$x_1(t,\lambda)$、$x_2(t,\lambda)$是方程(2.1)的基本解组，因此(2.1)的通解可表示为

$$x(t,\lambda) = c_1x_1(t,\lambda) + c_2x_2(t,\lambda). \qquad (2.4)$$

由(2.2)得到

$$\begin{aligned} U_1(x) &\equiv c_1U_1(x_1) + c_2U_1(x_2) = r_1, \\ U_2(x) &\equiv c_1U_2(x_1) + c_2U_2(x_2) = r_2. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

由于(2.5)是以c_1、c_2为未知数的线性代数方程组，且其系数行列式$\Delta \neq 0$。因此从(2.5)可解出唯一的c_1和c_2。代入(2.4)式就可得到满足边界条件(2.2)的解，并且是唯一的。

再证必要性。由于(2.1)、(2.2)组成的边值问题的解存在且唯一，而且解又必须包含在通解之中，于是将边界条件(2.2)代入通解表达式(2.4)中，要使任意常数c_1、c_2唯一确定，就必须有(2.3)成立。定理得证。

例1 讨论边值问题

$$\begin{cases} x''=0, \\ U_1(x)\equiv x(0)-x'(1)=-1, \\ U_2(x)\equiv x(0)+x'(1)=0 \end{cases}$$

的可解性。

解 显然，1和 t 构成方程 $x''(t)=0$的一个基本解组，而 $U_1(1)=1$，$U_1(t)=-1$，$U_2(1)=1$，$U_2(t)=1$，所以

$$\Delta=U_1(1)U_2(t)-U_1(t)U_2(1)=2\neq 0.$$

由定理5.1可知，此边值问题可解。

定理5.2 设$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t_1,\lambda)$是方程(2.1) 的基本解组，则由(2.1) 及

$$U_1(x)\equiv\alpha_{11}x(a)+\alpha_{12}x'(a)+\beta_{11}x(b)+\beta_{12}x'(b)=0,$$
$$U_2(x)\equiv\alpha_{21}x(a)+\alpha_{22}x'(a)+\beta_{21}x(b)+\beta_{22}x'(b)=0 \tag{2.6}$$

组成的齐次边值问题，存在非平凡解的充要条件是：

$$\Delta=U_1(x_1)U_2(x_2)-U_1(x_2)U_2(x_1)=0. \tag{2.7}$$

证明 先证充分性．由于方程(2.1) 的通解为

$$x(t,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda)+c_2x(t,\lambda). \tag{2.4}$$

由(2.6) 得到

$$U_1(x)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=0,$$
$$U_2(x)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=0.$$

这是一个线性齐次代数方程组，由于系数行列式 $\Delta=0$,因此存在非零解 c_1，c_2。代入通解表达式 (2.4) 即可得到齐次边值问题(2.1)，(2.6)的非平凡解.这些解的确定可相差一个常数因子,这是由于线性齐次边值问题的解乘上一个任意常数因子后，还是它的解。

再证必要性．由于满足齐次边值问题(2.1)、(2.6) 的非平凡解存在，当然这个解必须包含在通解 $x(t,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda)+c_2x_2(t,\lambda)$ 之中．因此，若要从通解中确定出这个非平凡解，就得要求c_1、c_2不同时为零，否则只能得到平凡解．故必须要求线性齐次代数方程组

$$U_1(x)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=0$$
$$U_2(x)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=0$$

的系数行列式$\Delta=0$，即(2.7) 成立．

例2 讨论边值问题

$$\begin{cases} x''(t)=0; \\ U_1(x)\equiv x(0)-x(1)=0, \\ U_2(x)\equiv x(0)+x(1)=0 \end{cases}$$

是否存在非平凡解．

解 已知1、t为方程的基本解组，而$U_1(1)=0$，$U_1(t)=-1$，$U_2(1)=2$，$U_2(t)=1$，从而

$$\Delta=U_1(1)U_2(t)-U_1(t)U_2(1)=2\neq 0.$$

由定理5.2知，此边值问题不存在非平凡解．

例3 证明边值问题

$$\begin{cases} x''+x=0, \\ U_1(x)\equiv x(0)+x'(0)+\dfrac{1}{2}x(\pi)-x'(\pi)=1, \\ U_2(x)\equiv x(0)-x'(0)+\dfrac{1}{2}x(\pi)+x'(\pi)=2 \end{cases}$$

的解存在且唯一，并求其解．

解 容易看出，$x_1(t)=\cos t$，$x_2(t)=\sin t$是方程$x''+x=0$的两个线性无关解，代入边界条件中得到

$$U_1(x_1)=\frac{1}{2},\ U_1(x_2)=2,U_2(x_1)=\frac{1}{2},U_2(x_2)=-2,$$

所以

$$\Delta = U_1(x_1)U_2(x_2) - U_1(x_2)U_2(x_1) = -2 \neq 0.$$

由定理5.1知，此边值问题的解存在且唯一。

而方程$x''+x=0$的通解为

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t,$$

由于

$$U_1(x) \equiv c_1U_1(x_1) + c_2U_1(x_2) = \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = 1,$$

$$U_2(x) \equiv c_1U_2(x_1) + c_2U_2(x_2) = \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 = 2.$$

故得到

$$c_1 = 3,\ \ c_2 = -\frac{1}{4}.$$

从而求得边值问题的解为

$$x(t) = 3\cos t - \frac{1}{4}\sin t.$$

例4 讨论边值问题

$$\begin{cases} x''=0, \\ U_1(x) \equiv x(0) - x(1) = 1, \\ U_2(x) \equiv x'(0) + x'(1) = 1 \end{cases}$$

解的存在性。

解 已知原方程的两个线性无关解为$x_1(t)=1, x_2(t)=t$，从而有

$$U_1(x_1) = 0,\ U_1(x_2) = -1,\ U_2(x_1) = 0,\ U_2(x_2) = 2.$$

所以

$$\Delta = U_1(x_1)U_2(x_2) - U_1(x_2)U_2(x_1) = 0.$$

根据定理5.1，此边值问题不可解，即满足边界条件的解不存在。

这个例子说明，对于方程$x''(t)=0$，尽管任一始值问题的解存在且唯一，但所述的边值问题的解却不存在。

这里要指出，对于

$$p_0x''+p_1x'+[p_2+\lambda p_3]x=f(t), \tag{2.8}$$

及(2.6) 组成的半齐次边值问题，可化为半齐次边值问题(2.1)，(2.2)。事实上，先求出(2.8)的任意一个特解$x_0(t,\lambda)$代入(2.6)得到

$$U_1(x_0)=r_1,\quad U_2(x_0)=r_2;$$

于是若设$\tilde{x}(t,\lambda)$是半齐次边值问题

$$p_0x''+p_1x'+[p_2+\lambda p_3]x=0,$$

$$U_1(x)=-r_1,\quad U_2(x)=-r_2$$

的解，则$x(t,\lambda)=\tilde{x}(t,\lambda)+x_0(t,\lambda)$就是半齐次边值问题(2.8)，(2.6) 的解。这是因为$x(t,\lambda)$满足(2.8) 而且满足边界条件

$$U_1(x)\equiv U_1(\tilde{x})+U_1(x_0)=-U_1(x_0)+U_1(x_0)=0,$$

$$U_2(x)\equiv U_2(\tilde{x})+U_2(x_0)=-U_2(x_0)+U_2(x_0)=0.$$

例5 求边值问题

$$\begin{cases}x''+x=t;\\ U_1(x)\equiv x(0)-3x'(\pi)=0,\\ U_2(x)\equiv 2x(0)+x'(\pi)=0\end{cases}$$

的解。

解 由于$x''+x=0$的基本解组为

$$x_1(t)=\cos t,\quad x_2(t)=\sin t.$$

我们分两步来解这个边值问题。

第一步，求出$x''+x=t$的特解$x_0(t)=t$，从而有

$$U_1(x_0)=-3,\quad U_2(x_0)=1;$$

第二步，求半齐次边值问题

$$\begin{cases} x''+x=0; \\ U_1(x)\equiv x(0)-3x'(\pi)=3, \\ U_2(x)\equiv 2x(0)+x'(\pi)=-1 \end{cases}$$

的解$\tilde{x}(t)$。

由于$U_1(x_1)=1$，$U_1(x_2)=3$，$U_2(x_1)=2$，$U_2(x_2)=-1$，因此

$$\Delta=U_1(x_1)U_2(x_2)-U_1(x_2)U_2(x_1)=-7。$$

由

$$c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=3,$$

$$c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=-1,$$

得到$c_1=0$，$c_2=1$。从而

$$\tilde{x}(t)=\sin t。$$

于是得原边值问题的解为

$$x(t)=\tilde{x}(t)+x_0(t)。$$

即

$$x(t)=\sin t+t。$$

定理5.3 设(2.1)的基本解组为$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$又(2.8)的一个特解为$x_0(t)$，则由(2.8)和(2.2)组成的边值问题，存在唯一解的充要条件是：

$$\Delta=U_1(x_1)U_2(x_2)-U_1(x_2)U_2(x)\neq 0。$$

证明 证法与定理5.1的证法类似。

要求一般的非齐次、半齐次或齐次边值问题的解以及解的性质是困难的。本书着重考察下列三类边界条件：

第一边界条件：$U_1(x)\equiv x(a)=r_1$，$U_2(x)\equiv x(b)=r_2$，

(2.9)

第二边界条件：$U_1(x)=x'(a)=r_1$，$U_2(x)\equiv x'(b)=r_2$；

(2.10)

第三边界条件：$U_1(x)\equiv\alpha_1 x(a)+\alpha_2 x'(a)=r_1$，
$U_2(x)\equiv\beta_1 x(b)+\beta x'(b)=r_2$。 (2.11)

由(2.1)和(2.9)组成的边值问题叫第一边值问题；由(2.1)和(2.10)组成的边值问题叫第二边值问题；由(2.1)和(2.11)组成的边值问题叫第三边值问题。当 $r_1=r_2=0$ 时，三类边值问题分别叫第一、第二、第三齐次边值问题。

第一齐次边值问题的求解问题是指：如果在区间$I=[a,b]$的两个端点上给定条件$x(a)=x(b)=0$，要求方程(2.1)的解$x(t,\lambda)\not\equiv 0$，使得$x(a)=x(b)=0$。这时，a和b称为$x(t,\lambda)$的共轭点，并说b右共轭于a，而a左共轭于b。

为了以后讨论问题的方便，我们将对二阶线性齐次方程作些必要的变换。

利用分部积分得

$$\int_a^b xp_0x''dt=xp_0x'\Big|_a^b-\int_a^b(xp_0)'x'dt$$

$$=\Big[xp_0x'-(xp_0)'x\Big]_a^b+\int_a^b(xp_0)''xdt,$$

(2.12)

$$\int_a^b xp_1x'dt=xp_1x\Big|_a^b-\int_a^b(xp_1)'xdt, \tag{2.13}$$

$$\int_a^b x[p_2+\lambda p_3]xdt=\int_a^b x[p_2+\lambda p_3]xdt. \tag{2.14}$$

将(2.12)、(2.13)、(2.14)两边分别相加，得

$$\int_a^b(xLx-x\bar{L}x)dt=\Big[xp_0x'-(xp_0)'x+xp_1x\Big]_a^b$$

(2.15)

其中

$$Lx \equiv p_0 x'' + p_1 x' + [p_2 + \lambda p_3]x,$$

$$\overline{L}x \equiv (p_0 x)'' - (p_1 x)' + [p_2 + \lambda p_3]x.$$

Lx称为二阶线性微分算子；$\overline{L}x$称为Lx的共轭算子。反之，Lx亦称为$\overline{L}x$的共轭算子。若$Lx \equiv \overline{L}x$，则称Lx是自共轭算子。由于

$\overline{L}x \equiv p_0 x'' + (2p_0' - p_1)x' + [p_0'' - p_1' + p_2 + \lambda p_3]x$，因此，当$p_0' \equiv p_1$时，有$Lx \equiv \overline{L}x$。反之，当$\overline{L}x \equiv Lx$成立时，则有$p_0' = p_1$。

显然，二阶线性自共轭微分算子，总可以写成：

$$Lx \equiv \overline{Lx} \equiv (p_0 x')' + (p_2 + \lambda p_3)x. \tag{2.16}$$

若$Lx \equiv \overline{L}x = 0$，称$Lx = 0$为二阶线性自共轭微分方程。

一般地，对于二阶线性齐次微分方程，只要$p_0(t) \neq 0$且可微，就可乘以正号函数$e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0} dt}$后，化为自共轭方程：

$$(px')' + [q(t) + \lambda r(t)]x = 0, \tag{2.17}$$

其中$p(t) \in c'(I)$，$q(t)$、$r(t) \in c(I)$，$p(t) \neq 0$，$I = [a, b]$。

例6 化尤拉方程

$$t^2 x'' + tx' + \lambda x = 0, \quad I = [1, 3]$$

为自共轭方程。

解 这里$p_0(t) = t^2$，$p_1(t) = t$，$p_2(t) = 0$，$p_3(t) = 1$。方程两边乘以正号函数

$$g(t) = \exp\left[\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0} dt\right] = \frac{1}{t},$$

即得

$$tx'' + x' + \frac{\lambda}{t}x = 0,$$

或

$$(tx')' + \frac{\lambda}{t}x = 0.$$

方程(2.17) 还可以进一步简化。首先把x''的系数化为1。这只要引进自变量变换

$$\xi = \int \frac{dt}{p(t)},$$

即可得到

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [q(t) + \lambda r(t)]p(t)x = 0, \tag{2.18}$$

其中t要用ξ表出。

其次再引进变换

$$x(\tau) = k(\xi)y(\tau), \quad \tau = \int \frac{d\xi}{k^2(\xi)},$$

其中$k(\xi)$待定，则可将方程(2.18)继续化简。这里

$$\frac{dx}{d\xi} = y\frac{dk}{d\xi} + k\frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{d\xi} = y\frac{dk}{d\xi} + \frac{1}{k}\frac{dy}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = y\frac{d^2k}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{d\xi}\frac{dk}{d\xi} - \frac{1}{k^2}\frac{dy}{d\tau}\frac{dk}{d\xi} + \frac{1}{k}\frac{d^2y}{d\tau^2}\frac{d\tau}{d\xi}$$

$$= y\frac{d^2k}{d\xi^2} + \frac{1}{k^2}\frac{dy}{d\tau}\frac{dk}{d\xi} - \frac{1}{k^2}\frac{dy}{d\tau}\frac{dk}{d\xi} + \frac{1}{k^3}\frac{d^2y}{d\tau^2}$$

$$= y\frac{d^2k}{d\xi^2} + \frac{1}{k^3}\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

将$\frac{d^2x}{d\xi^2}$的表达式代入(2.18)，得到

$$\frac{1}{k^3}\frac{d^2y}{d\tau^2} + \left[p(t)q(t) + \frac{1}{k}\frac{d^2k}{d\xi^2} + \lambda p(t)r(t)\right]ky = 0,$$

或

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+\left[k^4p(t)q(t)+k^3\frac{d^2k}{d\xi^2}+\lambda k^4p(t)r(t)\right]y=0.$$

当$p(t)>0$，$r(t)>0$时，可选择k使得$k^4p(t)r(t)=1$。若再令$-q_1(\tau)=k^4p(t)q(t)+k^3\dfrac{d^2k}{d\xi^2}$，则(2.18)可化为

$$y''+(-q_1(\tau)+\lambda)y=0, \tag{2.19}$$

其中$q_1(\tau)$是τ的已知函数。我们把(2.19)称为刘维尔正规型。

例7 把贝塞耳方程

$$y''(\tau)+\frac{1}{\tau}y'(\tau)+\left(\lambda-\frac{N^2}{\tau^2}\right)y(\tau)=0$$

化为刘维尔正规型。

解 这里$p_0(\tau)=1$，$p(\tau)=\dfrac{1}{\tau}$，$p_2(\tau)=-\dfrac{N^2}{\tau^2}$，$p_3(\tau)=1$，

因此对方程两边乘以正号函数

$$g(\tau)=\exp\left[\int\frac{p_1-p_0'}{p_0}d\tau\right]=\tau,$$

即可化为自共轭方程：

$$[\tau y'(\tau)]'+\left(\lambda\tau-\frac{N^2}{\tau}\right)y(\tau)=0.$$

令$\xi=\displaystyle\int\frac{d\tau}{\tau}=\ln\tau$，得到

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+(\lambda e^{2\xi}-N^2)y=0.$$

再令$k^4e^{2\xi}=1$，得$k(\xi)=e^{-\xi/2}$。于是作变换

$$t=\int\frac{d\xi}{k^2(\xi)}=e^{\xi}，\text{或者}\xi=\ln t,$$

$$y = e^{-1/2}x(t).$$

即可把贝塞耳方程化为刘维尔正规型：

$$x''(t) + \left(\lambda - \frac{N^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right)x(t) = 0.$$

§3 特 征 值 问 题

我们知道，齐次边值问题：

$$\begin{cases} Lx \equiv (p(t)x')' + [q(t) + \lambda r(t)]x = 0, & (3.1) \\ U_1(x) \equiv \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0, & \\ U_2(x) \equiv \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0. & (3.2) \end{cases}$$

有平凡解$x(t,\lambda) \equiv 0$.但是许多实际问题和理论问题却要求本问题的非平凡解。如果(3.1) 的基本解组是$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$，则其通解为

$$x(t,\lambda) = c_1 x_1(t,\lambda) + c_2 x_2(t,\lambda), \tag{3.3}$$

其中c_1，c_2是任意常数。由(3.2)、(3.3) 得到

$$\begin{aligned} U_1(x) &\equiv c_1 U_1(x_1) + c_2 U_1(x_2) = 0, \\ U_2(x) &\equiv c_1 U_2(x_1) + c_2 U_2(x_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

而(3.4) 的系数行列式为

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(x_1) & U_1(x_2) \\ U_2(x_1) & U_2(x_2) \end{vmatrix}.$$

根据定理(5.2) 知，$\Delta(\lambda) = 0$是边值问题(3.1)、(3.2) 存在非平凡解的充要条件。

于是由

$$\Delta(\lambda) = 0$$

而确定出的参数λ的值，使得(3.1)、(3.2)有非平凡解，我们把这样的λ值称为特征值；而相应的齐次边值问题叫做特征值问题；$\Delta(\lambda)$称为特征值问题的特征行列式；特征值问题的非平凡解称为特征值问题的特征函数。

如果在有限闭区间$I=[a,b]$上，(3.1)中的$p(t)$，$r(t)$不为零，而$p\in c'(I)$，$q(t)$，$r(t)\in c(I)$，则称(3.1)为正规的$S—L$方程(斯图姆—刘维尔方程)；(3.1)，(3.2)称为$S—L$问题或称$S—L$系。

如果(3.1)中的系数$p(t)$是t的以$b—a$为周期的周期函数，而在端点又有周期边界条件：

$$x(a)=x(b),\ x'(a)=x'(b),$$

则称这种$S—L$问题为周期$S—L$问题。

例1 求特征值问题

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)=0, \\ U_1(x)\equiv\alpha_1 x(a)+\alpha_2 x'(a)=0, \\ U_2(x)\equiv\beta_1 x(b)+\beta_2 x'(b)=0 \end{cases}$$

的特征行列式，其中$\lambda>0$是参数。

解 $x''(t)+\lambda x(t)=0$的基本解组可确定为

$$x_1(t,\lambda)=\sin\sqrt{\lambda}\,t,\ x_2(t,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,t,$$

从而其通解为

$$x(t,\lambda)=c_1\sin\sqrt{\lambda}\,t+c_2\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

由边界条件得

$$U_1(x)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=0$$

$$U_2(x)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=0.$$

即

$$c_1(\alpha_1\sin\sqrt{\lambda}\,a+\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,a)+c_2(\alpha_1\cos\sqrt{\lambda}\,a$$

$$-\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a)=0,$$

$$c_1(\beta_1\sin\sqrt{\lambda}b+\beta_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}b)+c_2(\beta_1\cos\sqrt{\lambda}b$$

$$-\beta_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}b)=0.$$

因此，所求特征值问题的特征行列式为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\alpha_1\sin\sqrt{\lambda}a & \alpha_1\cos\sqrt{\lambda}a\\ +\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a & -\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a\\ \beta_1\sin\sqrt{\lambda}b & \beta_1\cos\sqrt{\lambda}b\\ +\beta_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}b & -\beta_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}b\end{vmatrix}.$$

例2 求特征值问题

$$\begin{cases}x''+\lambda x=0\ ;\\ U_1(x)\equiv x(0)=0\ ,\\ U_2(x)\equiv x(\pi)=0\end{cases}$$

的非平凡解，其中λ是实数。

解 对参数λ，我们分三种情况来讨论。

i) 当$\lambda<0$时，令$\lambda=-\mu^2$，这时方程的两个线性无关的解为$x_1=e^{\mu t}$，$x_2=e^{-\mu t}$。从而它的通解为

$$x(t,\mu)=c_1e^{\mu t}+c_2e^{-\mu t}.$$

将边界条件代入上式，即得

$$U_1(x)\equiv c_1+c_2=0,$$

$$U_2(x)\equiv c_1e^{\mu\pi}+c_2e^{-\mu\pi}=0.$$

但是这个代数方程组的系数行列式

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\mu\pi} & e^{-\mu\pi}\end{vmatrix}=e^{\mu\pi}(e^{-2\mu\pi}-1)\neq 0.$$

即$\Delta(\mu)$没零点，因此，有$c_1=c_2=0$，亦即(3.5)、(3.6)组成的边值问题只有平凡解，而不存在非平凡解。

ii) 当$\lambda=0$时，此时方程的两个线性无关解可以是$x_1=1$，$x_2=t$，从而通解为

$$x(t)=c_1+c_2t.$$

再将边界条件代入上式，得到

$$U_1(x)\equiv c_1+c_2\cdot 0=0,$$

$$U_2(x)\equiv c_1+c_2\cdot\pi=0.$$

因此 $c_1=0,\quad c_2=0.$

也就是说，在这种情况下边值问题也不存在非平凡解。

iii) 当$\lambda>0$时，如前一样，得到方程的通解为

$$x(t,\lambda)=c_1\sin\sqrt{\lambda}\,t+c_2\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

由边界条件得到

$$U_1(x)\equiv c_1\cdot 0+c_2\cdot 1=0,$$

$$U_2(x)\equiv c_1\sin\sqrt{\lambda}\,\pi+c_2\cos\sqrt{\lambda}\,\pi=0.$$

从而

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \sin\sqrt{\lambda}\,\pi & \cos\sqrt{\lambda}\,\pi\end{vmatrix}=-\sin\sqrt{\lambda}\,\pi.$$

为了使特征值问题有非平凡解，令$\Delta(\lambda)=0$，即

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0.$$

所以 $\lambda=(n+1)^2,\quad n=0,1,2,\cdots.$

因此，当特征值为$1^2,2^2,3^2,\cdots n^2,\cdots$时，对应的特征函数为：$\sin t$，$\sin 2t,\cdots$，$\sin nt\cdots$。即所求特征值问题的解为$c\sin t$，$c\sin 2t,\cdots$，$c\sin nt,\cdots$，这里$c$为任意常数。因为我们所讨论的特征值问题的非平凡解是可以相差一个任意常数因子的，唯一性也是在这个意义上说的.

由特征值问题确定的特征值和特征函数的表示式，它们有下

列明显的性质：

1° 特征值 $\lambda_n=(n+1)^2$ $(n=0,1,\cdots)$，有

$$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots,$$

且当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\infty$。

2° 特征函数 $\sin(n+1)t$ 在 $(0,\pi)$ 中有 n 个零点．即 $\sin t$ 在 $(0,\pi)$ 中设有零点；$\sin 2t$ 在 $(0,\pi)$ 中有一个零点：$\tau=\frac{\pi}{2}$；$\cdots$，$\sin(n+1)t$ 在 $(0,\pi)$ 中有 n 个零点。$\tau_1=\frac{\pi}{n+1}$，$\tau_2=\frac{2\pi}{n+1}$，$\cdots$，$\tau_n=\frac{n\pi}{n+1}$。

3° 特征函数系 $\sin t$，$\sin 2t$，$\cdots$，$\sin(n+1)t$，$\cdots$ 是相互正交的，即有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(n+1)t\sin mt\,dt=\begin{cases}1 & \text{当} m=n+1 \text{时},\\ 0 & \text{当} m\neq n+1 \text{时}.\end{cases}$$

这些性质，§5中将要在更一般的情况下加以证明。

§4 格林函数

本节将通过求二阶线性微分算子的逆算子方法来解二阶线性非齐次方程的边值问题，并由此导出格林(Green)函数。这种算子称为积分算子，而积分算子的核就是格林函数。

1.单边格林函数．我们知道，要求始值问题

$$\begin{cases}Lx\equiv p_0(t)x''+p_1(t)x'+p_2(t)x=f(t); \quad t\in I=[a,b] & (4.1)\\ x(a)=0,\ x'(a)=0 & (4.2)\end{cases}$$

的解，如果已知$x_1(t)$，$x_2(t)$是对应齐次方程。

$$Lx\equiv p_0(t)x''+p_1(t)x'+p_2(t)x=0 \qquad (4.3)$$

的两个线性无关的解，则有

$$x(t)=-\int_a^t \frac{x_1(t)x_2(\tau)-x_2(t)x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}f(\tau)d\tau, \qquad (4.4)$$

其中$W(\tau)=\begin{vmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ x_1'(\tau) & x_2'(\tau) \end{vmatrix}$是朗斯基行列式。如果令。

$$g(t,\tau)=-\frac{1}{p_0(\tau)W(\tau)}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(\tau) & x_2(\tau) \end{vmatrix},$$

则(4.4) 可写成

$$x(t)=\int_a^t g(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

我们称$g(t,\tau)$为二阶线性微分算子的单边格林函数，或称L的逆算子L^{-1}的核。

容易直接验证，格林函数$g(t,\tau)$具有下列四个性质：

1° $g(t,\tau)$，$\frac{\partial g}{\partial t}$，$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$在定义的区域$[a,b]\times[a,b]$上连续；

2° $g(t,t)=0$；

3° $\left.\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t}=\frac{1}{p_0(t)}$；

4° 如果把$g(t,\tau)$仅看作t的函数，则g满足(4.3)。

下面我们继而讨论Lx的共轭算子的格林函数。为此，先对$g(t,\tau)$作一些变形：

$$\begin{aligned} g(t,\tau)&=-\frac{1}{p_0(\tau)W(\tau)}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(\tau) & x_2(\tau) \end{vmatrix} \\ &=-\frac{1}{p_0(\tau)W(\tau)}[x_1(t)x_2(\tau)-x_2(t)x_1(\tau)], \end{aligned}$$

即

$$g(t,\tau)=-\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}x_1(t)+\frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}x_2(t),\tag{4.5}$$

或者

$$g(t,\tau)=\frac{x_1(t)}{p_0(\tau)}\ \frac{\partial\ln W(\tau)}{\partial x_1'(\tau)}+\frac{x_2(t)}{p_0(\tau)}\ \frac{\partial\ln W(\tau)}{\partial x_2'(\tau)}.\tag{4.6}$$

我们知道，方程$Lx=0$的共轭方程为

$$\bar{L}x\equiv\frac{d^2}{dt^2}(p_0x)-\frac{d}{dt}(p_1x)+p_2x=0,\tag{4.7}$$

因此在(4.5)中，若令

$$x_1^*(t)=-\frac{x_2(t)}{p_0(t)W(t)},\quad x_2^*(t)=\frac{x_1(t)}{p_0(t)W(t)},$$

就可以证明

定理5.4 设$x_1(t)$，$x_2(t)$ 是(4.3) 的两个线性无关的解，则$x_1^*(t)$，$x_2^*(t)$是(4.7)的一个基本解组。

证明 先证$x_1^*(t)$，$x_2^*(t)$是方程(4.7)的解。

因为

$$\frac{d^2}{dt^2}(p_0x_1^*)=-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x_2}{W}\right)=-\left(\frac{x_2'}{W}\right)'+\left(\frac{x_2W'}{W^2}\right)'$$

$$=-\frac{x_2''}{W}-\frac{p_1x_2'}{p_0W}+\left(\frac{x_2W'}{W^2}\right)',$$

$$-\frac{d}{dt}(p_1x_1^*)=-\frac{d}{dt}\left(-\frac{p_1}{p_0}\ \frac{x_2}{W}\right)=-\left(\frac{x_2W'}{W^2}\right)',$$

$$p_2x_1^*=-\frac{p_2x_2(t)}{p_0W(t)},$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\bar{L}x_1^* &\equiv \frac{d^2}{dt^2}(p_0x_1^*) - \frac{d}{dt}(p_1x_1^*) + p_2x_1^* \\
&= -\frac{x_2''}{W} - \frac{p_1x_2'}{p_0W} + \left(\frac{x_2W'}{W^2}\right)' - \left(\frac{x_2W'}{W^2}\right)' - \frac{p_2x_2}{p_0W} \\
&= -\frac{1}{p_0W}(p_0x_2'' + p_1x_2' + p_2x_2) = 0.
\end{aligned}
$$

即

$$
\bar{L}x_1^* = 0.
$$

同理可证，$x_2^*(t)$是(4.7)的解。

再证$x_1^*(t)$，$x_2^*(t)$是线性无关的。事实上，只要证明朗斯基行列式$W(x_1^*,x_2^*)\neq 0$即可。由于

$$
W(x_1^*,x_2^*) = \begin{vmatrix} -\dfrac{x_2}{p_0W} & \dfrac{x_1}{p_0W} \\ -\dfrac{x_2'}{p_0W} + \dfrac{x_2(p_0W)'}{(p_0W)^2} & \dfrac{x_1'}{p_0W} - \dfrac{x_1(p_0W)'}{(p_0W)^2} \end{vmatrix}
$$

$$
= -\frac{x_1'x_2 - x_1x_2'}{(p_0W)^2} = \frac{1}{p_0^2W} \neq 0,
$$

从而$x_1^*(t)$，$x_2^*(t)$ 构成(4.7) 的基本解组。证毕。

现在，我们求出$\bar{L}x$的格林函数如下。由于

$$
g^*(t,\tau) = -\frac{1}{p_0(\tau)W^*(\tau)} \begin{vmatrix} x_1^*(t) & x_2^*(t) \\ x_1^*(\tau) & x_2^*(\tau) \end{vmatrix}
$$

$$
= -\frac{1}{p_0(\tau)W^*(\tau)} \begin{vmatrix} -\dfrac{x_2(t)}{p_0W(t)} & \dfrac{x_1(t)}{p_0W(t)} \\ -\dfrac{x_2(\tau)}{p_0W(\tau)} & \dfrac{x_1(\tau)}{p_0W(\tau)} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \dfrac{x_2(t)}{p_0W(t)} & \dfrac{x_2(t)}{p_0W(t)} \\ x_2(\tau) & x_1(\tau) \end{vmatrix}
$$

$$= -\frac{1}{p_0 W(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(\tau) & x_2(\tau) \end{vmatrix}$$

$$= -g(\tau, t).$$

因此，$\bar{L}x$的格林函数为

$$g^*(t,\tau) = -g(\tau,t)$$

2.双边格林函数. 我们首先通过求半齐次边值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(px') + q(t)x = f(t), & (4.8) \\ U_1(x) \equiv \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0, & \\ U_2(x) \equiv \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 & (4.9) \end{cases}$$

的解来导出双边格林函数的形式。此处α_1，α_2，β_1，β_2是实数，且$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$，$|\beta_1| + |\beta_2| > 0$，同时假设由（4.8)、(4.9)组成的边值问题是可解的。

由于(4.8) 对应的齐次方程

$$\frac{d}{dt}(px') + q(t)x = 0 \tag{4.10}$$

是自共轭方程，为方便起见，(4.10)的两个线性无关解 $x_1(t)$，$x_2(t)$可以这样选择：

$$x_1(a) = 0, \ x_1'(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (\alpha_2 \neq 0),$$

$$x_2(b) = 1, \ x_2'(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \quad (\beta_2 \neq 0),$$

从而$x_1(t)$，$x_2(t)$分别满足

$$U_1(x_1) \equiv \alpha_1 x_1(a) + \alpha_2 x_1'(a) = 0$$

$$U_2(x_2) \equiv \beta_1 x_2(b) + \beta_2 x_2'(b) = 0.$$

因为

$$W(x_1, x_2) = c\exp\left(-\int_a^t \frac{p'(\tau)}{p(\tau)} d\tau\right) = c\frac{p(a)}{p(t)},$$

于是要使$x_1(t)$，$x_2(t)$ 构成基本解组，只要设$c=\dfrac{1}{p(a)}\neq 0$ 即可。从而得到

$$p(t)[x_1(t)x_2'(t)-x_1'(t)x_2(t)]=1, \tag{4.11}$$

再令$t=a$，并将$x_1(a)=1$，$x_1'(a)=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$代入(4.11)，我们得到

$$U_1(x_1)\equiv\alpha_1x_2(a)+\alpha_2x_2'(a)=\frac{\alpha_2}{p(a)}.$$

同理可得

$$U_2(x_1)\equiv\beta_1x_1(b)+\beta_2x_1'(b)=\frac{\beta_2}{p(b)}.$$

根据第一段的讨论知，始值问题

$$\begin{cases}Lx\equiv(px')'+q(t)x=f(t),\\ x(a)=0,\quad x'(a)=0\end{cases}$$

的解，可写为

$$x_0(t)=\int_a^t[x_2(t)x_1(\tau)-x_2(\tau)x_1(t)]f(\tau)d\tau,$$

这是由于$p(\tau)W(\tau)=1$，因为$x_0(a)=x_0'(a)=0$，所以

$$U_1(x_0)\equiv\alpha_1x_0(a)+\alpha_2x_0'(a)=0;$$

由于

$$x_0(b)=\int_a^b[x_2(b)x_1(\tau)-x_1(b)x_2(\tau)]f(\tau)d\tau,$$

$$x_0'(b)=\int_a^b[x_2'(b)x_1(\tau)-x_1'(b)x_2(\tau)]f(\tau)d\tau,$$

所以

$$U_2(x_0)\equiv\beta_1x_0(b)+\beta_2x_0'(b)$$

$$=[\beta_1x_2(b)+\beta_2x_2'(b)]\int_a^b x_1(\tau)f(\tau)d\tau$$

$$-[\beta_1 x_1(b)+\beta_2 x_1'(b)]\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau$$

$$=-\frac{\beta_2}{p(b)}\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau.$$

即

$$U_1(x_0)\equiv\alpha_1 x_0(a)+\alpha_2 x_0'(a)=0,$$

$$U_2(x_0)\equiv\beta_1 x_0(b)+\beta_2 x_0'(b)=-\frac{\beta_2}{p(b)}\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau.$$

但是(4.8) 的通解为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+x_0(t).$$

由(4.9)得到

$$\begin{aligned}U_1(x)&\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)+U_1(x_0)=0,\\U_2(x)&\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)+U_2(x_0)=0,\end{aligned}\tag{4.12}$$

而 $U_1(x_1)=0$, $U_1(x_2)=\dfrac{\alpha_2}{p(a)}$, $U_2(x_1)=\dfrac{\beta_2}{p(b)}$, $U_2(x_2)=0$,

$U_1(x_0)=0$, $U_2(x_0)=-\dfrac{\beta_2}{p(b)}\displaystyle\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau$, 因此有

$$c_2\frac{\alpha_2}{p(a)}=0,$$

$$c_1\frac{\beta_2}{p(b)}-\frac{\beta_2}{p(b)}\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau=0.$$

从而得到

$$c_1=\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau,\quad c_2=0.$$

最后求得半齐次边值问题(4.8)，(4.9)的解为

$$x(t)=x_1(t)\int_a^b x_2(\tau)f(\tau)d\tau+\int_a^t[x_2(t)x_1(\tau)$$

$$-x_1(t)x_2(\tau)]f(\tau)d\tau$$

或者

$$x(t)=\int_a^t x_2(t)x_1(\tau)f(\tau)d\tau+\int_t^b x_1(t)x_2(\tau)f(\tau)d\tau \tag{4.13}$$

若设

$$G(t,\tau)=\begin{cases}x_2(t)x_1(\tau), & a\leqslant\tau\leqslant t;\\ x_1(t)x_2(\tau), & t\leqslant\tau\leqslant b;\end{cases}$$

则(4.13)可写成：

$$x(t)=\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

通常称$G(t,\tau)$为(4.8)的适合条件(4.9)的双边格林函数，或称逆算子L^{-1}的核。

由直接验证可知，双边格林函数具有单边格林函数类似的性质(但性质2°除外)。

1°　$G(t,\tau)\in C(I\times I)$，$I=[a,b]$；

2°　$\left.\dfrac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau+0}-\left.\dfrac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau-0}=\dfrac{1}{p(\tau)}$；

3°　$G(t,\tau)$关于t满足方程

$Lx\equiv(px')'+q(t)x=0$；

4°　$G(t,\tau)$关于t满足边界条件(4.9)，即

$U_1(G)\equiv\alpha_1G(a,\tau)+\alpha_2G(a,\tau)=0$，

$U_2(G)\equiv\beta_1G(b,\tau)+\beta_2G'(b,\tau)=0$。

下面我们进而讨论含参数的自共轭方程的双边格林函数。

定义1　对于含参数λ的自共轭方程，其半齐次边值问题

$$\begin{cases}Lx\equiv(px')'+(q+\lambda r)x=f(t); & (4.14)\\ U_1(x)\equiv\alpha_1x(a)+\alpha_2x'(a)=0, & \\ U_2(x)\equiv\beta_1x(b)+\beta_2x'(b)=0 & (4.9)\end{cases}$$

的格林函数$G(t,\tau,\lambda)$是指满足下列条件的函数：

1° $G(t,\tau,\lambda)\in C[I\times I\times(\lambda_1,\lambda_2)]$，$I=[a,b]$；

2° $\left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=\tau+0}-\left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=\tau-0}=\frac{1}{p(\tau)}$；

3° $LG=0$，$U_1(G)=0$，$t\in[a,\tau]$；

4° $LG=0$，$U_2(G)=0$，$t\in[\tau,b]$，

其中$\lambda\neq\lambda_n$，λ_n是$Lx=0$，$U_1(x)=0$，$U_2(x)=0$的特征值。

我们将证明，满足上述定义的格林函数是存在的。

定理5.5 若$x_1(t,\lambda)$和$x_2(t,\lambda)$分别是

$$Lx_1=0,\quad U_1(x_1)=0$$

和

$$Lx_2=0,\quad U_2(x_2)=0$$

的解，并且$p(t)W(x_1,x_2)=1$，则格林函数可表示为

$$G(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}x_1(t,\lambda)x_2(\tau,\lambda) & t\in[a,\tau]\\ x_2(t,\lambda)x_1(\tau,\lambda) & t\in[\tau,b]\end{cases}$$

特别是

$$G(t,\tau,\lambda)=G(\tau,t,\lambda).$$

证明 设$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$是$Lx=0$的两个线性无关的解，且分别满足$U_1(x_1)=0$，$U_2(x_2)=0$。而要求的格林函数也分别在$[a,\tau]$，$[\tau,b]$上满足$Lx=0$及$U_1(G)=0$，$U_2(G)=0$。由此可见，如果格林函数$G(t,\tau,\lambda)$存在，则必须在$[a,\tau]$，$[\tau,b]$上分别与$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$只相差一个常数因子。事实上，由于

$$U_1(x_1)\equiv\alpha_1x_1(a)+\alpha_2x_1'(a)=0,$$

$$U_1(G)\equiv\alpha_1G(a)+\alpha_2G'(a)=0,$$

而$|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq0$，从而必须有

$$\begin{vmatrix}x_1(a) & x_1'(a)\\ G(a) & G'(a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1(a) & G(a)\\ x_1'(a) & G'(a)\end{vmatrix}=0.$$

即$x_1(t,\lambda)$和$G(t,\tau,\lambda)$是线性相关的．也就是

$$G(t,\tau,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda),\qquad t\in[a,\tau].$$

同理可证

$$G(t,\tau,\lambda)=c_2x_2(t,\lambda),\qquad t\in[\tau,b].$$

要把$G(t,\tau,\lambda)$完全确定下来，关键是要满足关于格林函数定义中的全部条件，并由此定出任意常数c_1和c_2。

由于$G(t,\tau,\lambda)$在$t=\tau$处连续，所以有

$$c_1x_1(\tau,\lambda)-c_2x_2(\tau,\lambda)=0,\tag{4.15}$$

又因$G(t,\tau,\lambda)$在$t=\tau$处一阶导数间断，所以有

$$c_2x_2'(\tau,\lambda)-c_1x_1'(\tau,\lambda)=\frac{1}{p(\tau)}\tag{4.16}$$

从(4.15)、(4.16)解出c_1,c_2为

$$c_1=\frac{x_2(\tau,\lambda)}{p(\tau)W(\tau)},\qquad c_2=\frac{x_1(\tau,\lambda)}{p(\tau)W(\tau)}.$$

由于$Lx=0$是自共轭方程，且$p(\tau)W(\tau)=1$，从而有

$$c_1=x_2(\tau,\lambda),\quad c_2=x_1(\tau,\lambda).$$

这样一来，就可以定出格林函数如下：

$$G(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}x_1(t,\lambda)x_2(\tau,\lambda), & t\in[a,\tau]\\ x_1(\tau,\lambda)x_2(t,\lambda). & t\in[\tau,b]\end{cases}$$

并由$G(t,\tau,\lambda)$的表达式，可直接得出

$$G(t,\tau,\lambda)=G(\tau,t,\lambda).$$

定理5.6 如果$f(t)$在$[a,b]$上连续，则

$$x(t,\lambda)=\int_a^b G(t,\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$

是半齐次边值问题

$$\begin{cases}Lx\equiv(px')'+(q+\lambda r)x=f(t),\\ U_1(x)\equiv\alpha_1x(a)+\alpha_2x'(a)=0,\\ U_2(x)\equiv\beta_1x(b)+\beta_2x'(b)=0\end{cases}$$

的解，其中$G(t,\tau,\lambda)$是格林函数。

证明　先证满足方程，为此将表达式

$$x(t,\lambda)=\int_a^b G(t,\tau,\lambda)f(\tau)d\tau,$$

改写成

$$x(t,\lambda)=\int_a^t x_2(t,\lambda)x_1(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$
$$+\int_t^b x_1(t,\lambda)x_2(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$

然后关于t对$x(t,\lambda)$求导得出

$$x'(t,\lambda)=\int_a^t x_2'(t,\lambda)x_1(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$
$$+\int_t^b x_1'(t,\lambda)x_2(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau,$$

$$x''(t,\lambda)=\int_a^t x_2''(t,\lambda)x_1(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$
$$+\int_t^b x_1''(t,\lambda)x_2(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau+[x_2'(\tau,\lambda)$$
$$x_1(t,\lambda)-x_1'(t,\lambda)x_2(t,\lambda)]f(t)$$
$$=\int_a^t x_2''(t,\lambda)x_1(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau+\int_t^b x_1''(t,\lambda)$$
$$x_2(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau+\frac{f(t)}{p(t)}.$$

所以有

$$Lx\equiv(px')'+[q+\lambda r]x$$
$$=\left[\int_a^t x_1(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau\right]Lx_2+\left[\int_t^b x_2(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau\right]Lx_1$$
$$+f(t)$$
$$=f(t).$$

再证满足边界条件。由

$$U_1(x) \equiv \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a)$$

$$= \alpha_1 \int_a^b x_1(a,\lambda) x_2(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau$$

$$+ \alpha_2 \int_a^b x_1'(a,\lambda) x_2(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau$$

$$= [\alpha_1 x_1(a,\lambda) + \alpha_2 x_1'(a,\lambda)] \int_a^b x_2(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau,$$

所以$U_1(x)=0$，同理可得$U_2(x)=0$。

例1 求半齐次边值问题

$$\begin{cases} x'' + 4x = f(t); \\ U_1(x) \equiv x(0) = 0, \\ U_2(x) \equiv x'(\pi) = 0 \end{cases}$$

的解。

解 容易求得对应齐次方程满足条件 $x(0)=0$ 的解为 $x_1 = c_1 \sin 2t$，而满足条件 $x'(\pi)=0$的解为 $x_2(t) = c_2 \cos 2t$。考虑 c_1，c_2 为 τ 的函数，我们有

$$c_1 \sin 2\tau - c_2 \cos 2\tau = 0,$$

$$-2c_2 \sin 2\tau - 2c_1 \cos 2\tau = 0.$$

解出得

$$c_1 = -\frac{1}{2}\cos 2\tau, \quad c_2 = -\frac{1}{2}\sin 2\tau,$$

从而定出格林函数为

$$G(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cos 2\tau \sin 2t, & t \in [0,\tau] \\ -\dfrac{1}{2}\cos 2t \sin 2\tau, & t \in [\tau,\pi] \end{cases}$$

于是得到所半齐次边值问题的解为

$$x(t) = -\frac{\cos 2t}{2}\int_0^t f(\tau)\sin 2\tau d\tau$$

$$-\frac{\sin 2t}{2}\int_t^{\pi} f(\tau)\cos 2\tau d\tau.$$

例2 求半齐次边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t), \\ U_1(x) \equiv x(0) = 0, \\ U_2(x) \equiv x'(1) = 0 \end{cases}$$

的解。

解 对应齐次方程$x''(t)=0$的两个线性无关解为$x_1(t)=t$，$x_2(t)=1$且$x_1(0)=0$，$x_2'(1)=0$。故可设

$$x_1(t) = c_1 t,\quad x_2(t) = c_2.$$

由于

$$c_1(\tau)\tau - c_2(\tau) = 0,$$

$$0 - c_1(\tau) = 0,$$

所以

$$c_1(\tau) = -1,\quad c_2(\tau) = -\tau.$$

从而定出格林函数为

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -t & t\in[0,\tau], \\ -\tau & t\in[\tau,1]. \end{cases}$$

所以

$$x(t) = -\int_0^t \tau f(\tau)d\tau - t\int_t^1 f(\tau)d\tau.$$

例3 求半齐次边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t), \\ U_1(x) \equiv x(0) = 1, \\ U_2(x) \equiv x(1) + hx'(1) = 0 \end{cases}$$

的解。

解 对应齐次方程$x''(t)=0$的通解为

$$x(t)=c_1t+c_2.$$

容易看出，适合边界条件$x(0)=0$的解为$x(t)=t$，因此可取$x_1(t)=c_1t$。

又由$x(t)=c_1t+c_2$及边界条件$x(1)+hx'(1)=0$，得到

$$x_2(t)=c_2(\tau)t-c_2(\tau)(1+h).$$

于是我们有

$$c_1(\tau)\tau-c_2(\tau)\tau+c_2(\tau)(1+h)=0,$$

$$c_2(\tau)-c_1(\tau)=1,$$

所以得到

$$c_1(\tau)=\frac{\tau}{1+h}-1,\quad c_2(\tau)=\frac{\tau}{1+h}.$$

因此可定出格林函数为

$$G(t,\ \tau)=\begin{cases}\left(\dfrac{\tau}{1+h}-1\right)t, & t\in[0,\ \tau]\\ \left(\dfrac{t}{1+h}-1\right)\tau, & t\in[\tau,\ 1].\end{cases}$$

从而得到所求边值问题的解为

$$x(t)=\int_0^t\left(\frac{t}{1+h}-1\right)\tau f(\tau)d\tau+t\int_t^1\left(\frac{\tau}{1+h}-1\right)f(\tau)dt.$$

3.广义格林函数. 在第二段中，我们讨论的是参数$\lambda\neq\lambda_n$的情形，即λ不是特征值的情形。如果$\lambda=\lambda_n$时，格林函数的概念就要进行推广。但这种推广的格林函数必须保持格林函数的基本性质，如保持连续、导函数在$t=\tau$处间断、满足边界条件等，下面我们先看一个例子。

考虑半齐次边值问题：

$$\begin{cases} x''(t)+(\lambda+1)x(t)=1; \\ U_1(x)\equiv x(0)=0, \\ U_2(x)\equiv x(\pi)=0. \end{cases}$$

容易看出，$\lambda=0$是特征值，对应的特征函数为$x(t)=\sin t$。从而不存在两个线性无关的解$x_1(t)$、$x_2(t)$，使得$x_1(t)$和$x_2(t)$分别满足

$$U_1(x_1)\equiv x_1(0)=0,$$

$$U_2(x_2)\equiv x_2(\pi)=0.$$

当然，格林函数也就无法构造出来了。但是，如果我们对$f(t)$附加些条件，这个问题仍然可以得到解决。

定理5.7 对于半齐次边值问题

$$\begin{cases} Lx\equiv(px')'+(q+\lambda r)x=f(t); \\ U_1(x)\equiv\alpha_1 x(a)+\alpha_2 x'(a)=0, \\ U_2(x)\equiv\beta_1 x(b)+\beta_2 x'(b)=0, \end{cases}$$

有解的充分必要条件是

$$\int_a^b f(\tau)x_n(\tau)d\tau=0. \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

这里$x_n(t)$是特征值λ_n对应的特征函数。

证明 先证必要性。由于

$$\begin{aligned} xLx_n-x_nLx &= x\left[(px_n')'+(q+\lambda r)x_n\right] \\ &\quad -x_n\left[(px')'+(q+\lambda r)x\right] \\ &= x(px_n')'-x_n(px')' \\ &= \left[p(xx_n'-x'x_n)\right]', \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b\left[xLx_n-x_nLx\right]d\tau=-\int_a^b x_nf(\tau)d\tau$$
$$=\left[p(xx_n'-x'x_n)\right]_a^b$$
$$=0.$$

所以

$$\int_a^b f(\tau)x_n(\tau)d\tau=0.$$

再证充分性．选择满足方程 $Lx=f(x)$ 的解 $x(t)$，使 $x(b)=x_n(b)$，$x'(b)=x_n'(b)$，从而有

$$U_2(x)\equiv U_2(x_n)\equiv\beta_1x(b)+\beta_2x'(b)=0.$$

又由于$Lx=f(t)$，$Lx_n=0$，$\int_a^b f(\tau)x_n(\tau)d\tau=0$，

及 $$x_nLx-xLx_n=[p(xx_n'-x'x_n)]'$$

所以

$$\int_a^b(x_nLx-xLx_n)d\tau=\left[p(xx_n'-x'x_n)\right]_a^b=\int_a^b f(\tau)x_n(\tau)d\tau$$
$$=0.$$

从而得到

$$p(b)\left[x(b)x_n'(b)-x'(b)x_n(b)\right]-p(a)\left[x(a)x_n'(a)-x'(a)x_n(a)\right]=0.$$

亦即$x(t)$满足 $U_1(x)\equiv\alpha_1x(a)+\alpha_2x'(a)=0$．因此$x(t)$就是所求问题的解．定理证毕．

下面我们进而讨论广义格林函数问题．

不失一般性，以后将设特征值 $\lambda_n=0$．若$\lambda_n\neq0$，可令 $\mu=\lambda-\lambda_n$ 作为新参数，将有 $\mu_n=0$．

定理5.8 若S-L问题

$$
\begin{cases}
Lx \equiv (px')' + q(t)x = 0, \\
U_1(x) \equiv \alpha_1 x(a) - \alpha_2 x'(a) = 0, \\
U_2(x) \equiv \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0.
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

有解$x_0(t)$，且$\int_a^b x_0^2(t)d\tau = 1$，则存在唯一的广义格林函数 $G(t, \tau)$，它具有如下性质：

1° $LG(t, \tau) = x_0(t)x_0(\tau)$，$U_1(G) = 0$，$t \in [a, \tau]$；

2° $LG(t, \tau) = x_0(t)x_0(\tau)$，$U_2(G) = 0$，$t \in [\tau, b]$；

3° $G(t, \tau) \in C[I \times I]$，$I = [a, b]$；

$G(t, \tau) \in C^2[a, \tau]$，$G(t, \tau) \in C^2[\tau, b]$；

4° $\left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=\tau+0} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=\tau-0} = \dfrac{1}{p(\tau)}$；

5° $\int_a^b G(t, \tau)x_0(\tau)d\tau = 0$。

证明 我们知道，对(4.10)可以选择与 $x_0(t)$ 线性无关的另一个解$x_1(t)$，使得

$$
p(t)[x_0(t)x_1'(t) - x_0'(t)x_1(t)] = 1.
$$

设$\omega(t)$是$Lx = x_0(t)x_0(\tau)$的任意一个特解，根据线性非齐次方程通解的结构，我们给出：

$$
G(t, \tau) = \begin{cases}
\omega(t) + c_1x_0(t) + c_2x_1(t), & t \in [a, \tau] \\
\omega(t) + c_3x_0(t) + c_4x_1(t). & t \in [\tau, b]
\end{cases}
$$

其中 $c_i(i = 1, 2, 3, 4)$可由$G(t, \tau)$应具备的性质逐一得到确定。

首先使$G(t, \tau)$满足边界条件：

$$
U_1(G) \equiv U_1(\omega) + c_1U_1(x_0) + c_2U_1(x_1) = 0,
$$

$$
U_2(G) \equiv U_2(\omega) + c_3U_2(x_0) + c_4U_2(x_1) = 0.
$$

因为$x_0(t)$与$x_1(t)$线性无关，所以有$U_1(x_1) \neq 0$，$U_2(x_1) \neq 0$。从而可定出c_2、c_4为

$$c_2=-\frac{U_1(\omega)}{U_1(x_1)},\quad c_4=\frac{U_2(\omega)}{U_2(x_1)} \tag{4.17}$$

即

$$c_2-c_4=\frac{U_2(\omega)}{U_2(x_1)}-\frac{U_1(\omega)}{U_1(x_1)} \tag{4.18}$$

但是，由$G(t,\ \tau)\in C(I\times I)$及$G'(\tau+0,\ \tau)-G'(\tau-0,\ \tau)$

$=\dfrac{1}{p(\tau)}$，可得

$$(c_1-c_3)x_0(\tau)+(c_2-c_4)x_1(\tau)=0,$$

$$(c_1-c_3)x_0'(\tau)+(c_2-c_4)x_1'(\tau)=\frac{1}{p(\tau)}.$$

于是求出

$$c_1-c_3=-x_1(\tau), \tag{4.19}$$

$$c_2-c_3=x_0(\tau). \tag{4.20}$$

现在证明(4.18)与(4.20)是一致的。由

$$p(a)[x_0(a)x_1'(a)-x_0'(a)x_1(a)]=1,$$

$$p(b)[x_0(b)x_1'(b)-x_0'(b)x_1(b)]=1,$$

及
$$\alpha_1x_0(a)+\alpha_2x_0'(a)=0,$$

$$\beta_1x_0(b)+\beta_2x_0'(b)=0,$$

不难求出

$$x_0(a)=\frac{\alpha_2}{p(a)U_1(x_1)},\quad x_0'(a)=\frac{-\alpha_1}{p(a)U_1(x_1)},$$

$$x_0(b)=\frac{\beta_2}{p(b)U_2(x_1)},\quad x_0'(b)=\frac{-\beta_1}{p(b)U_2(x_1)}.$$

又因

$$x_0L\omega-\omega Lx_0=[p(x_0\omega'-x_0'\omega)]',$$

积分上式并注意$\int_a^b x_0^2(t)dt=1$，即得

$$x_0(\tau)=\Big[p(x_0\omega'-x_0'\omega)\Big]_a^b$$

$$=p(b)[x_0(b)\omega'(b)-x_0'(b)\omega(b)]$$

$$-p(a)[x_0(a)\omega'(a)-x_0'(a)\omega(a)].$$

将已求出的$x_0(a)$，$x_0'(a)$，$x_0(b)$，$x_0'(b)$代入上式，即得

$$x_0(\tau)=\frac{U_2(\omega)}{U_2(x_1)}-\frac{U_1(\omega)}{U_1(x_1)}.$$

所以(4.18)与(4.20)完全一致。

为了求出c_1，c_2，我们由(4.19)得

$$c_1=c_3-x_1(\tau),$$

再利用性质5°及(4.17)，有

$$\int_a^b G(t,\ \tau)x_0(\tau)d\tau$$

$$=\int_a^b \omega(\tau,\ t)x_0(t)dt+c_3(\tau)\int_a^\tau x_0^2(t)dt-\int_a^\tau x_1(\tau)$$

$$x_0^2(t)dt+c_3(\tau)\int_\tau^b x_0^2(t)dt-\frac{U_1(\omega)}{U_1(x_1)}\int_a^\tau x_1(t)x_0(t)dt$$

$$-\frac{U_2(\omega)}{U_2(x_1)}\int_\tau^b x_1(t)x_0(t)dt$$

$$=0,$$

从而得出

$$c_3(\tau)=-\int_a^b \omega(\tau,\ t)x_0(t)dt+x_1(\tau)\int_a^\tau x_0^2(t)dt$$

$$+\frac{U_1(\omega)}{U_1(x_1)}\int_a^\tau x_1(t)x_0(t)dt+\frac{U_2(\omega)}{U_2(x_1)}\int_\tau^b x_1(t)x_0(t)dt.$$

根据以上推导，c_1，c_2，c_3，c_4均可唯一确定，从而$G(t,\ \tau)$亦

可唯一确定，即由上述步骤定出的函数$G(t,\ \tau)$具有广义格林函数所有的性质。定理得证。

例4 求S—L问题

$$\begin{cases} x''+x=0; \\ U_1(x)\equiv x(0)=0, \\ U_2(x)\equiv x(\pi)=0 \end{cases}$$

的广义格林函数。

解 显然 $x_0(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin t$，$x_1(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cos t$ 是方程的两个线性无关解，且 $x_0(t)$满足边界条件。通过直接验证，可知方程

$$\omega''+\omega=\frac{2\sin t}{\pi}\sin t$$

的一个特解为

$$\omega(t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi}\sin\tau\sin t-\frac{t}{\pi}\cos t\sin\tau.$$

容易算出：

$$U_1(x_1)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ U_1(\omega)=0$$

$$U_2(x_1)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ U_2(\omega)=\sin\tau.$$

所以有

$$c_1=c_3-x_1(\tau)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\tau\cos\tau-\frac{1}{2}\sin\tau\right]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\tau,$$

$$c_2=-\frac{U_1(\omega)}{U_1(x_1)}=0;$$

$$c_3 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\tau\cos\tau - \frac{1}{2}\sin\tau\right],$$

$$c_4 = -\frac{U_2(\omega)}{U_2(x_1)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\tau.$$

从而得到广义格林函数为

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sin\tau\sin t - \frac{t}{\pi}\cos t\sin\tau - \frac{\tau}{\pi}\cos\tau\sin t \\ \qquad + \sin\tau\cos t, \quad t\in[0,\ \tau] \\ \frac{1}{\pi}\sin t\sin\tau - \frac{\tau}{\pi}\cos\tau\sin t - \frac{t}{\pi}\cos t\sin\tau \\ \qquad + \sin t\cos\tau, \quad t\in[\tau,\ \pi].\end{cases}$$

下面我们证明第三边值问题的解可用以广义格林函数为核的积分式表出。

定理5.9 设$G(t,\ \tau)$是S—L问题

$$\begin{cases}Lx\equiv(px')'+qx=0; \\ U_1(x)\equiv\alpha_1x(a)+\alpha_2x'(a)=0, \\ U_2(x)\equiv\beta_1x(b)+\beta_2x'(b)=0\end{cases}$$

的广义格林函数，而$x_0(t)$是相应的S—L问题的解且

$\int_a^b f(t)x_0(t)dt=0$，则半齐次边值问题

$$\begin{cases}Lx=f(x); \\ U_1(x)=0, \\ U_2(x)=0\end{cases}$$

的解，可唯一表示为

$$x(t)=\int_a^b G(t,\ \tau)f(\tau)d\tau.$$

证明 存在性。因为

$$x'(t)=\int_a^b G'(t,\ \tau)f(\tau)d\tau$$

$$x''(t)=\int_a^t G''(t,\ \tau)f(\tau)d\tau+\int_t^b G''(t,\ \tau)f(\tau)d\tau$$

$$+\left[\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{\tau=t+0}-\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{\tau=t-0}\right]f(t)$$

$$=\int_a^b G''(t,\ \tau)f(\tau)d\tau+\frac{f(t)}{p(t)}$$

所以，有

$$Lx\equiv\int_a^b(LG)f(\tau)d\tau+f(t)$$

$$=-\int_a^b x_0(t)x_0(\tau)f(\tau)d\tau+f(t)$$

$$=f(t)$$

再证唯一性。根据定理5.7，只要证得除$x_0(t)$能与$f(t)$正交外（但可相差一个常数因子），再找不到一个与$x_0(t)$线性无关的解$\tilde{x}(t)$，它也与$f(t)$正交。若$\tilde{x}(t)$存在，即$\tilde{x}(t)$亦是S—L问题的特征函数，这就说明$\tilde{x}(t)$与$x_0(t)$是线性相关的。定理证毕。

§5 振动定理

从§3的讨论中可知，特征值问题

$$\begin{cases}x''(t)+\lambda x(t)=0,\\U_1(x)\equiv x(0)=0,\\U_2(x)\equiv x(\pi)=0\end{cases}$$

的特征值是$\lambda_0=1^2$，$\lambda_1=2^2$，…，$\lambda_n=(n+1)^2$，…。即$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$，且当$n\to\infty$时，$\lambda_n\to\infty$；$\lambda_n$对应的特征函数$x_n(t)$在$(0,\ \pi)$内有$n$个零点；当$n\neq m$时，$x_n(t)$与$x_m(t)$是正交的，这个特征值问题是一般的特征值问题

$$
\begin{cases}
Lx \equiv (px')' + [q(t) + \lambda r(t)]x = 0, & (5.1) \\
U_1(x) \equiv \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0, & \\
U_2(x) \equiv \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 & (5.2)
\end{cases}
$$

的特例。一般特征值问题（5.1），（5.2）的特征值、特征函数亦具有上述性质。这就是振动定理要回答的问题。

引理1 设（5.1）中 $p(t)\in C'(I)$，$q(t)$，$r(t)\in C(I)$，$p(t)>0$，$I=[a, b]$，λ是参数。若$x(t)$是(5.1)在 I 上的一个非平凡解，则$x(t)$在闭区间I上最多只有有限个零点。

证明　用反证法。设$x(t)\neq 0$在I上有无限多个零点，于是在I上就有一个零点序列$t_n(x(t_n)=0)$，将使$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t_0$且$t_0\in I$，又因$x(t)$在$t_0$处连续可微，因此有

$$x(t_0)=\lim_{t_n\to t_0} x(t_n)=0,$$

及
$$x'(t_0)=\lim_{t_n\to t_0}\frac{x(t_n)-x(t_0)}{t_n-t_0}=0.$$

即$x(t)$是(5.1)的由初始值条件$x(t_0)=x'(t_0)=0$ 决定的解，由唯一性定理，$x(t)\equiv 0$。这与假设矛盾。引理得证。

这个引理说明，方程(5.1)的非平凡解的零点，在闭区间上是分离的。即只能是有限个。

1.斯图姆比较定理. 二阶线性齐次微分方程定性理论的重要定理，是关于解的零点的比较和分离定理。这种数学思想是斯图姆首先发现的，并在1836年公之于世。近一个半世纪以来，这种数学思想有了很大的发展。本段只介绍几个基本的比较定理。

为简便起见，令$Q(t)=q(t)+\lambda r(t)$，于是方程(5.1)即可写成

$$Lx\equiv (px')'+Q(t)x=0. \qquad (5.1)'$$

定理5.10（比较定理） 设方程

$$Lx \equiv (px')' + Q_1(t)x = 0, \tag{5.3}$$

$$My \equiv (py')' + Q_2(t)y = 0 \tag{5.4}$$

中，$p(t) \in C'(I)$，$Q_1(t)$、$Q_2(t) \in C(I)$，$p(t) > 0$，$I = [a, b]$。在(a, b)内有 $Q_2(t) \geqslant Q_1(t)$，且在(a, b) 内的任一子区间上均有

$$Q_2(t) \not\equiv Q_1(t)。$$

又设 $x(t)$是 $Lx = 0$的非平凡解，c、d是$x(t)$ 的两个相邻的零点，$a < c < d < b$。若$y(t)$是$My = 0$的任意解，则$y(t)$在(c, d)内至少有一个零点。

证明　由恒等式

$$0 \equiv yLx - xMy \equiv y(px')' - x(py')' + (Q_1 - Q_2)xy,$$

推出

$$[p(yx' - y'x)]' = [Q_2(t) - Q_1(t)]xy。$$

将上式两端从c到d积分，得到

$$\int_c^d [p(yx' - y'x)]' dt = \int_c^d (Q_2 - Q_1)xy dt。 \tag{5.5}$$

若 $y(t)$在(c, d)内不为零，一般地可设在(c, d)内 $y(t) > 0$，$x(t) > 0$。由于$Q_2(t) \geqslant Q_1(t)$且在(c, d)内任一子区间上$Q_2(t) \not\equiv Q_1(t)$，因此，(5.5)的右端是正数，而左端有

$$[p(yx' - y'x)]_c^d = p(d)y(d)x'(d) - p(c)y(c)x'(c) \leqslant 0。$$

这是由于$x'(c) > 0$，$x'(d) < 0$。于是得到矛盾。定理得证。

定理5.11 (分离定理) 设$x_1(t)$，$x_2(t)$是(5.1)′的两个线性无关的解，又c、d是$x_1(t)$的两个相邻的零点，则在(c, d)内必有且仅有$x_2(t)$的一个零点。

证明　因为$x_1(t)$，$x_2(t)$是(5.1)′的两个线性无关的解，因此朗斯基行列式$W(x_1, x_2) \neq 0$。又由

$$Lx_1 \equiv (px_1')' + Q(t)x_1 = 0,$$

$$Lx_2 \equiv (px_2')' + Q(t)x_2 = 0,$$

于是类似(5.5)即可得到

$$[p(x_1'x_2 - x_1x_2')]_c^d = 0,$$

即

$$p(d)x_1'(d)x_2(d) - p(c)x_1'(c)x_2(c) = 0. \qquad (5.6)$$

若 $x_2(t)$ 在 (c, d) 内没有零点，不失一般性，可设 $x_1(t)>0$，$x_2(t)>0$，$t\in(c, d)$。由于$x_1(t)$，$x_2(t)$ 是线性无关的，因此 $x_2(c)\neq 0$，$x_2(d)\neq 0$（否则就有 $W(x_1, x_2)=0$，这与假设矛盾）。从而又有

$$[p(d)x_1'(d)x_2(d) - p(c)x_1'(c)x_2(c)] < 0$$

这与(5.6)相矛盾。定理得证。

定理5.12 在方程(5.3)，(5.4)中，关于 $p(t)$、$Q_1(t)$、$Q_2(t)$的假设同定理5.10。又设

i) $\dfrac{x'(a)}{x(a)} \geqslant \dfrac{y'(a)}{y(a)}$，当$x(a)\neq 0$，$y(a)\neq 0$时，或者

ii) $x(a)=y(a)=0$，

则在(a,b)内$y(t)$的零点至少与$x(t)$一样多。若在i)中$x(t)$的零点是$a<t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant b$，而$y(t)$的零点是$a<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n\leqslant \leqslant\tau_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant\tau_m\leqslant b$，则有$\tau_k<t_k$。

证明　由定理5.10，$x(t)$的两个相邻零点之间至少有$y(t)$的一个零点，从而在(t_1, t_n)内至少有$(n-1)$个零点。现再证(a, t_1)内至少有$y(t)$的一个零点。对于i)的情形，由(5.5)可得

$$\Big[p(yx' - y'x)\Big]_a^{t_1} = \int_a^{t_1}(Q_2 - Q_1)xy\,dt. \qquad (5.7)$$

同样，可设$y(t)>0$，$x(t)>0$，$t\in(a, t)$从而(5.7)的右端是正

的，而左端依据假设应有

$$p(t_1)x'(t_1)y(t_1)-p(a)[x'(a)y(a)-x(a)y'(a)]\leqslant 0.$$

这是矛盾的。从而在$(a,\ t_1)$内至少有一个零点。

至于ii) 的情形，是明显的。

例1 试讨论方程

$$Lx\equiv x''+16x=0,$$

$$My\equiv y''+81y=0$$

的解$x=\sin 4t$，$y=\sin 9t$在$(0,\ \pi)$内零点位置的关系。

解 由于所设方程中$p(t)=1$，$Q_1(t)=16$，$Q_2(t)=81$，且有$x(0)=y(0)=0$，因此定理5.12的假设条件全部满足。即$y(t)=\sin 9t$在$(0,\ \pi)$内的零点个数不会比$x(t)=\sin 4t$的零点个数少。事实上，$x(t)=\sin 4t$的零点为$t_1=\dfrac{\pi}{4}$，$t_2=\dfrac{2\pi}{4}$，$t_3=\dfrac{3\pi}{4}$，而

$y(t)=\sin 9t$的零点为$\tau_1=\dfrac{\pi}{9}$，$\tau_2=\dfrac{2\pi}{9}$，$\tau_3=\dfrac{3\pi}{9}$，$\tau_4=\dfrac{4\pi}{9}$，

$\tau_5=\dfrac{5\pi}{9}$，$\tau_6=\dfrac{6\pi}{9}$，$\tau_7=\dfrac{7\pi}{9}$，$\tau_8=\dfrac{8\pi}{9}$。从而$\tau_1<t_1$，$\tau_2<t_2$，

$\tau_3<t_3$。

定理5.13 设在方程(5.3)、(5.4)中，关于$p(t)$，$Q_1(t)$，$Q_2(t)$及$x(t)$，$y(t)$的假设同定理5.10。再设$x(t)$与$y(t)$在(a,b)内有同样多个零点，若$x(b)\neq 0$，则

$$\frac{x'(b)}{x(b)}>\frac{y'(b)}{y(b)}.$$

证明 若t_n是$x(t)$在$(a,\ b)$内最右一个零点，由于$x(b)\neq 0$及$x(t)$与$y(t)$的零点个数相同，因此$y(b)\neq 0$。设在$(t_n,\ b)$上有$x(t)>0$，$y(t)>0$，因而$x'(t_n)>0$。由(5.5)推得

$$\Big[p(x'y-xy')\Big]_{t_n}^{b}=\int_{t_n}^{b}(Q_2-Q_1)xydt>0,$$

即

$$p(b)[x'(b)y(b)-x(b)y'(b)]-p(t_n)x'(t_n)y(t_n)>0;$$

或者

$$p(b)[x'(b)y(b)-x(b)y'(b)]>p(t_n)x'(t_n)y(t_n)>0.$$

所以有

$$\frac{x'(b)}{x(b)}>\frac{y'(b)}{y(b)}.$$

由上述几个比较定理，我们还可以进一步得到二阶线性齐次方程解的零点之间距离的估计定理。

定理5.14 设方程 (5.1)′ 中，$p(t)\equiv1$，$Q(t)\in C(I)$，$I=[a,b]$；又$M=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}Q(t)$，$m=\min\limits_{a\leqslant t\leqslant b}Q(t)$，$x(t)$是 (5.1)′ 的非平凡解．那么

i) 若$M\leqslant0$，则在I上$x(t)$最多有一个零点；

ii) 若 $M>0$，则在 I 上 $x(t)$ 的任意两个零点 t_i、t_{i+1}均有

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}}\leqslant(t_{i+1}-t_i);$$

iii) 若$m>0$，则$\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}\leqslant(t_{i+1}-t_i)\leqslant\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$，

$$(t_n-t_i)\leqslant\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{m}},\quad n>(b-a)\frac{\sqrt{m}}{\pi}-1.$$

其中n是$x(t)$在$[a,b]$上零点的个数。

证明 i) 若$M\leqslant0$，作比较方程$y''(t)=0$，且$y(t)=1$是其非平凡解，没有零点，从而$x''+Q(t)x=0$的任一非平凡解不可能多于一个零点．否则，$y(t)=1$就应至少有一个零点，但这是不可能

的。故i）得证。

ii）若$M>0$，作比较方程$y''(t)+My=0$，这个方程的通解可写成$y(t)=A\sin[\sqrt{M}(t-\alpha)]$，其中$\alpha$、$A$是任意常数。显然，$y(t)$的零点为$\tau_i=\alpha+\frac{i\pi}{\sqrt{M}}$，因此，$y(t)$的两个相邻零点之间的距离为$\frac{\pi}{\sqrt{M}}$。如果$x''(t)+Q(t)x=0$的非平凡解$x(t)$的两个相邻零点$t_{i+1}$、$t_i$之间的距离大于$\frac{\pi}{\sqrt{M}}$，则总可以通过适当选取任意常数$\alpha$，使$\tau_i=\alpha+\frac{i\pi}{\sqrt{M}}$，$\tau_{i+1}=\alpha+\frac{(i+1)\pi}{\sqrt{M}}$包含在$[t_i,t_{i+1}]$的内部。这样一来，在$[t_i,\ t_{i+1}]$内再没有$y(t)$的零点了。这就与定理5.10相矛盾。即有

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}}\leqslant(t_{i+1}-t_i)。$$

iii）证法与ii）类似。现证$n>(b-a)\frac{\sqrt{m}}{\pi}-1$。因为$[a,t_1]$与$[t_n,\ b]$的长都小于$\frac{\pi}{\sqrt{m}}$，而

$$t_n-t_1\leqslant\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{m}}。$$

所以

$$b-a=t_1-a+t_n-t_1+b-t_n\leqslant\frac{2\pi}{\sqrt{m}}+\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{m}}$$

即

$$n\geqslant\frac{(b-a)\sqrt{m}}{\pi}-1。$$

2. 振动定理 为了证明振动定理，先对边界条件$U_1(x)\equiv \alpha_1 x(a)+\alpha_2 x'(a)=0$，$U_2(x)\equiv\beta_1 x(b)+\beta_2 x'(b)=0$进行适当的变换。若以$\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2/p^2(a)}$除$U_1(x)=0$的两端，并令$\cos\theta_a=\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2/p^2(a)}}$，$\sin\theta_a=-\dfrac{\alpha_2/p(a)}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2/p^2(a)}}$，则$U_1(x)=0$就变换为

$$x(a)\cos\theta_a-x'(a)\sin\theta_a=0.$$

同样令$\cos\theta_b=\dfrac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2/p^2(b)}}$，$\sin\theta_b=-\dfrac{\beta_2/p(b)}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2/p^2(b)}}$，$U_2(x)=0$就变换为

$$x(b)\cos\theta_b-x'(b)\sin\theta_b=0.$$

这里限制$0\leqslant\theta_a<\pi$，$0<\theta_b\leqslant\pi$，θ_a，θ_b就可唯一确定。

为了证明方便起见，我们对方程

$$Lx\equiv(px')'+Q(t)x=0 \tag{5.1$'$}$$

进行Prüfer变换：

$$x(t)=\rho(t)\sin\theta(t),\quad p(t)x'(t)=\rho(t)\cos\theta(t). \tag{5.8}$$

于是

$$\rho^2(t)=(px')^2+x^2,$$

$$\theta(t)=\operatorname{arctg}\frac{x}{px'}.$$

对$\theta(t)$求导，得到

$$\theta'(t)=\frac{\dfrac{x'}{px'}-\dfrac{x(px')'}{(px')^2}}{1+\left(\dfrac{x}{px'}\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{\theta(t)\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}},$$

即

$$\theta'(t)=\frac{\cos^2\theta}{p}+Q(t)\sin^2\theta.$$

或

$$\theta'(t)=\frac{\cos^2\theta}{p}+[q+\lambda r]\sin^2\theta. \tag{5.9}$$

类似地，对$\rho(t)$求导，得

$$\rho'(t)=\rho\left[\frac{1}{p}-Q(t)\right]\cos\theta\sin\theta.$$

在证明振动定理之前，我们先建立三个引理。

引理2 对于方程

$$Lx\equiv(p_1x')'+(q_1+\lambda r_1)x=0, \tag{5.10}$$

$$My\equiv(p_2y')'+(q_2+\lambda r_2)y=0, \tag{5.11}$$

令$Q_1(t)=q_1+\lambda r_1$，$Q_2(t)=q_2+\lambda r_2$。设$p_1(t)$、$p_2(t)\in C'(I)$，$q_1(t)$、$q_2(t)$、$r_1(t)$、$r_2(t)\in C(I)$，且$p_1(t)\geqslant p_2(t)>0$，$Q_2(t)\geqslant Q_1(t)$。把(5.10)和(5.11)通过(5.8)作变换，得：

$$\theta_1'(t)=\frac{\cos^2\theta_1}{p_1}+Q_1\sin^2\theta_1, \tag{5.12}$$

$$\theta_2'(t)=\frac{\cos^2\theta_2}{p_2}+Q_2\sin^2\theta_2, \tag{5.13}$$

若$\theta_1(t)$是方程(5.12)满足始值$\theta_1(a)$的解，$\theta_2(t)$是方程(5.13)满足始值$\theta_2(a)$的解；当$\theta_2(a)\geqslant\theta_1(a)$时，则有

$$\theta_2(t)\geqslant\theta_1(t),\qquad t\in[a,b].$$

证明 令

$$F_1(t,\theta)=\frac{\cos^2\theta}{p_1}+Q_1\sin^2\theta,$$

$$F_2(t,\theta)=\frac{\cos^2\theta}{p_2}+Q_2\sin^2\theta.$$

由于$p_1(t)\geqslant p_2(t)>0$，$Q_2(t)\geqslant Q_1(t)$，推知

$$F_2(t,\theta)\geqslant F_1(t,\theta).$$

从而

$$(\theta_2-\theta_1)'=F_2(t,\theta_2)-F_1(t,\theta_1)$$
$$\geqslant F_1(t,\theta_2)-F_1(t,\theta_1),$$

或写成

$$(\theta_1-\theta_2)'\leqslant F_1(t,\theta_1)-F_1(t,\theta_2)\leqslant l|\theta_1-\theta_2|,$$

其中$l=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\dfrac{\partial F_1}{\partial\theta}\right|$. 再令

$$\varphi(t)=\theta_1(t)-\theta_2(t),$$

若结论不成立，即$\theta_1(t)>\theta_2(t)$，则有

$$\varphi'(t)-l\varphi(t)\leqslant 0.$$

将上式的两端乘以e^{-lt}并从a到t积分，得

$$\varphi(t)\leqslant\varphi(a)e^{l(t-a)}\leqslant 0.$$

这与$\varphi(t)>0$的假设相矛盾，引理得证。

引理3 在方程(5.10)与方程(5.11)中，除假设$Q_2(t)>Q_1(t)$外，其余假设均同引理2，则

$$\theta_2(t)>\theta_1(t),\qquad t\in(a,b].$$

证明 下面分两种情形考虑：

当$\theta_2(a)>\theta_1(a)$时，由引理2，对一切$t\in[a,b]$都可得到$\theta_2(t)>\theta_1(t)$。

当$\theta_2(a)=\theta_1(a)$时，可以证明不存在a点的右邻域，使得在这个邻域内$\theta_2(t)\equiv\theta_1(t)$。事实上，若存在满足$a<\delta<b$的常数$\delta$，使得当$t\in[a,\delta]$时有$\theta_2(t)\equiv\theta_1(t)\equiv\theta(t)$，于是由方程(5.12)和(5.13)推得

$$\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)\cos^2\theta+(Q_2-Q_1)\sin\theta\equiv 0,$$

从而得到

$$p_1(t)\equiv p_2(t),\ \theta(t)=n\pi,\ (n=0,1,2,\cdots).$$

再利用(5.12)和(5.13)，即可得出

$$\frac{1}{p_1}=\frac{1}{p_2}=0,\qquad t\in[a,\delta].$$

由于$p_1(t)$，$p_2(t)\in C'(I)$，所以这是不可能的。这个矛盾说明确实不存在使$\theta_1(t)\equiv\theta_2(t)$的区间$[a,\delta]$，于是就存在以$a$为极限点的点列$\{t_n\}\in(a,b]$，使得

$$\theta_2(t_n)>\theta_1(t_n).$$

根据引理2，当$t>t_n$时，有$\theta_2(t)>\theta_1(t)$。但是当$n\to\infty$时，$t_n\to a$，所以有

$$\theta_2(t)>\theta_1(t),\qquad t\in(a,b].$$

引理4 设$\theta(t,\lambda)$是方程

$$\theta'(t)=\frac{\cos^2\theta}{p}+[q+\lambda r]\sin^2\theta \tag{5.9}$$

满足始值$\theta(a,\lambda)=\theta_a\geqslant 0$的解，这里$p(t)$、$q(t)$、$r(t)\in C(I)$，$p(t)$、$r(t)>0$，则有

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\theta(b,\lambda)=0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\theta(b,\lambda)=+\infty.$$

证明 显然，对固定的t值，$q(t)+\lambda r(t)$是λ的增函数。因此，若记$Q_1(t)=q(t)+\lambda_1 r(t)$，$Q_2(t)=q(t)+\lambda_2 r(t)$，当$\lambda_2>\lambda_1$时，就有$Q_2(t)>\theta_1(t)$，于是根据引理3，推得$Q_2(t)>\theta_1(t)$，即$\theta(t,\lambda)$是$\lambda$的增函数。因为$\theta_a\geqslant 0$，从而$\theta(t,\lambda)\geqslant 0$。

选择常数A和B，使得

$$0<B<\pi,\ \theta_a<A<\pi.$$

如图5—1，若解$\theta(t,\lambda)$的曲线穿过AB，则在AB上必有

$$\theta'(t,\lambda)\geqslant\frac{B-A}{b-a},$$

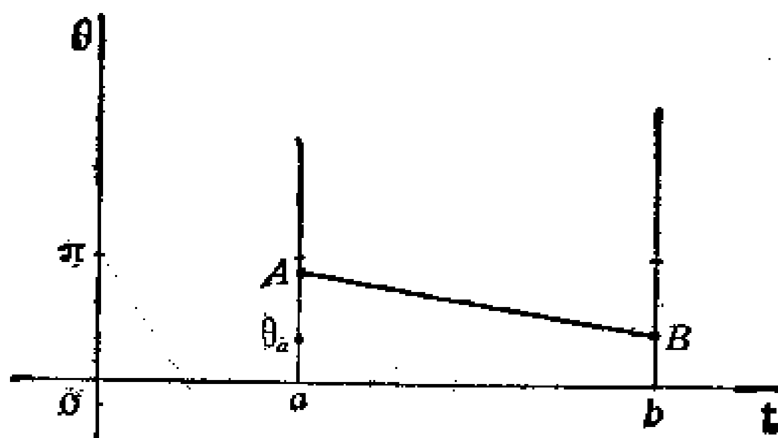


图5—1

另一方面，我们选择充分大的正数$M>0$，对所有的$\lambda<-M$时，在AB上均有

$$\frac{\cos^2\theta}{p(t)}+[q(t)+\lambda r(t)]\sin^2\theta<\frac{B-A}{b-a},$$

即

$$\theta'(t,\lambda)<\frac{B-A}{b-a}.$$

这个矛盾就说明曲线$\theta(t,\lambda)$当$\lambda<-M$时不可能穿过AB。从而得到

$$0\leqslant\theta(b,\lambda)\leqslant B.$$

但由于B是可以任意小的正数，所以

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\theta(b,\lambda)=0$$

再证$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\theta(b,\lambda)=+\infty$，我们选择$c>0$，使得

$$\frac{c-\theta_a}{b-a}\geqslant\min_{t\in I}\frac{1}{p(t)}.$$

如图5—2，设直线$\theta_a c$和水平直线$\theta(t,\lambda)=k\pi$在点P_k相交，过P_k作一条斜率为s_k，长度很小的线段A_kB_k，$k=1,2,\cdots$。此处

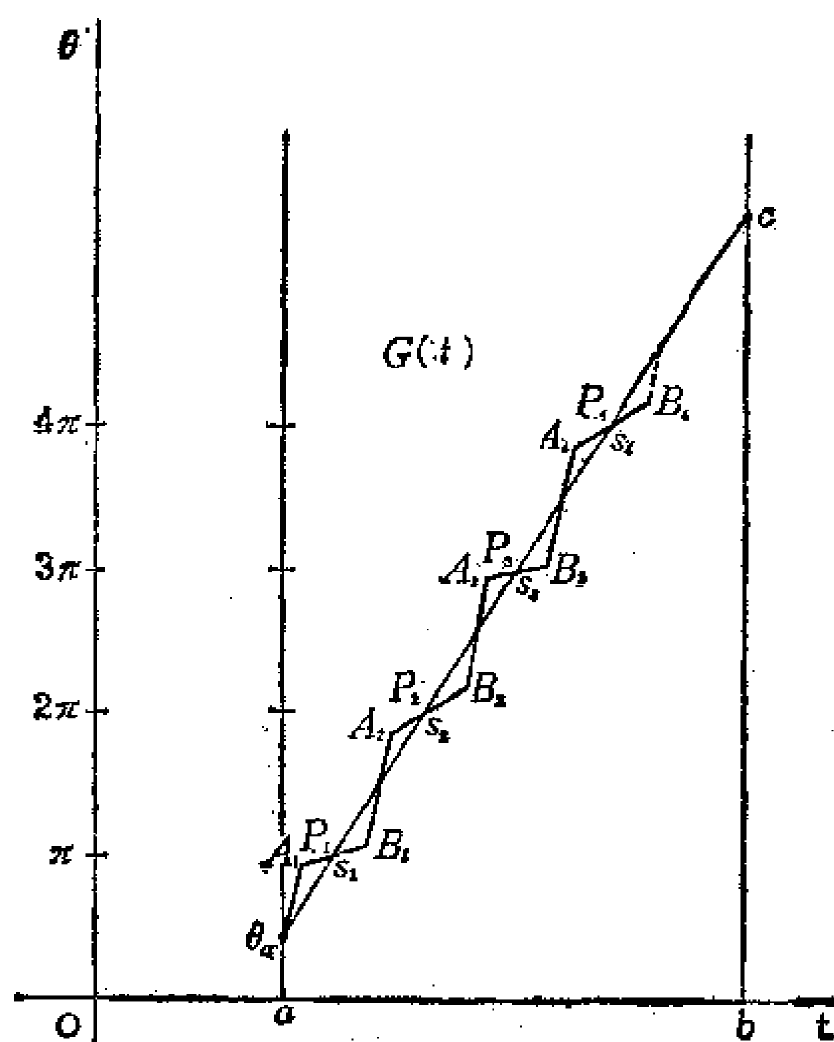


图5—2

$$0<s_k\leqslant\min_{t\in I}\frac{1}{2p(t)}.$$

联结$\theta_a A_1$，B_1A_2，…，组成一个折线$\theta_a A_1B_1\cdots A_kB_k\cdots c$，记它为$G(t)$。于是$G(t)$除去点$A_k$，$B_k(k=1,2,\cdots)$外，处处都有连续的导数，而在点$A_k$，$B_k$处也有左右导数存在，并且是有限的。从而我们可以选择充分大正数$M>0$，当$\lambda>M$时，有

$$\theta'(t,\lambda)>G'(t)。\tag{5.14}$$

于是在区间$[a,b]$上有

$$\theta(t,\lambda)>G(t)。$$

特别是$\theta(b,\lambda)>c$，但c是可以任意大的，所以

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\theta(b,\lambda)=+\infty。$$

现在我们来证明(5.14)成立。事实上，在所有线段A_kB_k上，可选取一个正数$M_1>0$，使得当$\lambda>M_1$时，有

$$q(t)+\lambda r(t)>\frac{1}{p(t)}。$$

所以

$$\theta'(t,\lambda)=\frac{\cos^2\theta}{p(t)}+(q+\lambda r)\sin^2\theta$$

$$\geqslant\frac{\cos^2\theta}{p(t)}+\frac{\sin^2\theta}{p(t)}=\frac{1}{p(t)},$$

即

$$\theta'(t,\lambda)\geqslant\frac{1}{p(t)}>\frac{1}{2p(t)}\geqslant\min_{t\in I}\frac{1}{2p(t)}\geqslant S_k。(k=1,2,\cdots)。$$

在线段$\theta_aA_1,B_1A_2\cdots,B_{k-1}A_k,\cdots$上，存在着$\delta>0$，使得$\sin^2\theta\geqslant\delta$，从而可选取充分大的正数$M_2$，当$\lambda>M_2$时，就有

$$\frac{\cos^2\theta}{p(t)}+(q+\lambda r)\sin^2\theta\geqslant\frac{\cos^2\theta}{p(t)}+(q+\lambda r)\delta>G'(t)。$$

于是只要选择$\lambda>M=\max(M_1,\ M_2)$，就可得到

$$\theta'(t,\lambda)>G'(t)。$$

引理得证。

定理5.15（振动定理） 对于S—L问题

$$\begin{cases}Lx\equiv(px')'+[q+\lambda r]x=0; & (5.1)\\ U_1(x)\equiv\alpha_1x(a)+\alpha_2x'(a)=0, & \\ U_2(x)\equiv\beta_1x(b)+\beta_2x'(b)=0 & (5.2)\end{cases}$$

设$p(t)\in C'(I)$，$q(t)$、$r(t)\in C(I)$，$p(t)$、$r(t)>0, I=[a,b]$，且α_1，α_2，β_1，β_2是不同时为零的实常数，则有

i) 有无穷多个特征值$\{\lambda_n\}$，且

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty;$$

ii) 每个特征值λ_n对应的特征函数$x_n(t)$在区间I内有n个零点。

证明　设$\theta(t,\lambda)$是方程(5.9)满足始值$\theta(a,\lambda)=\theta_a$的解。由于$\theta(t,\lambda)$连续依赖于参数$\lambda$，根据引理4有

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\theta(b,\lambda)=0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\theta(b,\lambda)=+\infty,$$

从而可以选取唯一的λ_0值，使得$\theta(b,\lambda_0)=\theta_b$。即方程(5.9)存在唯一的解$\theta(t,\lambda_0)$，满足边界条件：

$$\theta(a,\lambda_0)=\theta_a,\qquad \theta(b,\lambda_0)=\theta_b.$$

设$x_0(t,\lambda_0)$是通过(5.8)确定的$L_{\lambda_0}x\equiv(px')'+(q+\lambda_0 r)x=0$的解。于是$x_0(t,\lambda)$满足边界条件

$$U_1(x_0)\equiv\alpha_1x_0(a)+\alpha_2x_0'(a)=0,$$

$$U_2(x_0)\equiv\beta_1x_0(b)+\beta_2x_0'(b)=0.$$

我们证明$x_0(t,\lambda_0)$在(a,b)内没有零点，如若不然，设有某个$t_1\in(a,b)$使得$x_0(t_1,\lambda_0)=0$，则$\theta(t_1)=k\pi$（k为某个整数）且$\theta'(t_1)>0$。但$\theta(a,\lambda_0)<\pi, \theta(b,\lambda_0)\leqslant\pi$。因此必有$\theta(t_2)=k\pi(t_2\in(a,b))$，否则$\theta(b,\lambda_0)\geqslant k\pi$。另一方面，由$\theta'(t_1,\lambda_0)>0$，$\theta'(t_2,\lambda_0)<0$（由于是相邻零点），这是不可能的。从而$x_0(t,\lambda_0)$在$(a,b)$内没有零点。

现在设$\lambda_1>\lambda_0$是唯一使得$\theta(t,\lambda_1)$满足(5.9)的λ值，且满足边界条件。

$$\theta(a,\lambda_1)=\theta_a,$$

$$\theta(b,\lambda_1)=\theta_b+\pi.$$

同样，设$x_1(t,\lambda_1)$是通过(5.8)确定的。

$$L_{\lambda_1}x\equiv(px')'+(q+\lambda_1 r)x=0$$

的解，且满足边界条件

$$U_1(x_1)\equiv\alpha_1 x_1(a)+\alpha_2 x_1'(a)=0,$$

$$U_2(x_1)\equiv\beta_1 x_1(b)+\beta_2 x_1(b)=0.$$

容易看出，在(a,b)内存在一点t_1，使$\theta(t_1,\lambda_1)=\pi$，从而使$x_1(t)=\rho(t)\sin\theta(t)$有一零点$t_1$，此外再没有别的零点。

一般说来，存在$\{\lambda_n\}$且有$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$及$\theta(b,\lambda_n)=\theta_b+n\pi$。由于取$\theta(t_k,\lambda_k)=k\pi$的只有一次，所以$x_n(t_n,\lambda_n)$在$(a,b)$内，正好只有$n$个零点。

设M是一个任意大的正数，且有$\theta(b,M)=k$，又可选择充分大的m使$\theta_b+m\pi>k$，从而存在一个$\lambda_m>M$，有$\theta(b,\lambda_m)=\theta_b+m\pi$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

3.特征函数的正交性。

定理5.16 特征值问题中，不同的特征值λ_n，λ_m对应的特征函数$x_n(t,\lambda_n)$，$x_m(t,\lambda_m)$是带权$r(t)$正交的，即

$$\int_a^b r(t)x_n(t,\lambda_n)x_m(t,\lambda_m)dt=0,\qquad m\neq n.$$

证明 由

$$(px_n')'+(q+\lambda_n r)x_n=0,\tag{5.15}$$

$$(px_m')'+(q+\lambda_m r)x_m=0.\tag{5.16}$$

将(5.15)乘以x_m再减去(5.16)乘以x_n得

$$[p(x_n'x_m-x_nx_m')]'=(\lambda_m-\lambda_n)rx_nx_m,$$

从a到b对上式两端进行积分

$$p(b)[x_n'(b)x_m(b)-x_n(b)x_m'(b)]-p(a)[x_n'(a)x_m(a)-x_n(a)x_m'(a)]=(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b r x_n x_m dt. \tag{5.17}$$

由于

$$U_1(x_n)\equiv \alpha_1 x_n(a)+\alpha_2 x_n'(a)=0,$$

$$U_1(x_m)\equiv \alpha_1 x_m(a)+\alpha_2 x_m'(a)=0,$$

及α_1，α_2是不同时为零的实常数，从而必须有

$$\begin{vmatrix} x_n(a) & x_m(a) \\ x_n'(a) & x_m'(a) \end{vmatrix}=0,$$

即

$$x_n'(a)x_m(a)-x_n(a)x_m'(a)=0. \tag{5.18}$$

同理，有

$$x_n'(b)x_m(b)-x_n(b)x_m'(b)=0, \tag{5.19}$$

将(5.18)，(5.19)代入(5.17)的左端，就得到

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b r(t)x_n(t,\lambda_n)x_m(t,\lambda_m)dt=0$$

因为$\lambda_m\neq\lambda_n$，所以

$$\int_a^b r(t)x_n(t,\lambda_n)x_m(t,\lambda_m)dt=0.$$

例2 验证S—L问题

$$\begin{cases}(t,x')'+\dfrac{\lambda}{t}x=0, \\ U_1(x)\equiv x'(1)=0, \\ U_2(x)\equiv x'(e^{2\pi})=0\end{cases}$$

的特征函数是带权正交的。

解 显然其特征函数为

$$x_n(t)=\cos\frac{n\ln t}{2},\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

因为

$$\int_1^{e^{2\pi}}\frac{1}{t}\cos\frac{n\ln t}{2}\cos\frac{m\ln t}{2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\tau\cos\frac{m\pi}{2}\tau d\tau=0\qquad (m\neq n)$$

所以，本问题的特征函数$x_n(t)$是在$[1,e^{2\pi}]$上带权$\frac{1}{t}$正交的。

习　题

1. 已知$x_1(t)=\cos t$，$x_2(t)=\sin t$

$U_1(x)\equiv 2x(0)+3x'(0)+3x(\pi)+2x'(\pi)$，

$U_2(x)\equiv 3x(0)-2x'(0)+2x(\pi)-3x'(\pi)$，

求$U_1(x_1)$，$U_1(x_2)$，$U_2(x_1)$，$U_2(x_2)$。

验证下列边值问题可解性条件并求其解。

2. $x''(t)+2x'(t)-3x(t)=0$；$U_1(x)\equiv x(0)=0$，$U_2(x)\equiv x'(1)=0$。

3. $x''(t)=0$，$U_1(x)\equiv x(-1)=0$；$U_2(x)\equiv x(1)-2x'(1)=0$。

4. $x''(t)+2x'(t)-3x(t)=9t$，$U_1(x)\equiv x(0)=1$，$U_2(x)\equiv x'(1)=2$。

5. $x''(t)=2$；$U_1(x)\equiv x(-1)=0$，$U_2(x)\equiv x(1)-2x'(1)=0$。

6. $x''(t)-x(t)=t$，$U_1(x)\equiv x(0)=0$，$U_2(x)\equiv x(1)=1$。

求下列$S-L$问题的特征值和特征函数：

7. $x''(t)+\lambda x(t)=0$；$U_1(x)\equiv x'(0)=0$，$U_2(x)\equiv x'(\pi)=0$。

8. $(tx'(t))'+\frac{\lambda}{t}x(t)=0$；$U_1(x)\equiv x(1)=0$，$U_2(x)\equiv x(e^{\pi})=0$。

9. $(t^2x'(t))'+\frac{\lambda}{t^2}x(t)=0$；$U_1(x)\equiv x(1)=0$，$U_2(x)\equiv x(2)=0$。

10．验证$x(t)=\int_a^t g(t,\tau)f(\tau)d\tau$是始值问题

$$\begin{cases} Lx\equiv p_0(t)x''(t)+p_1(t)x'(t)+p_0(t)x(t)=f(t),\\ x(a)=x'(a)=0 \end{cases}$$

的解，其中$g(t,\ \tau)$是单边格林函数。

求下列$S—L$问题的格林函数。

11．$x''(t)+9x(t)=0$；$U_1(x)\equiv x(0)=0$，$U_2(x)\equiv x(\pi)=0$。

12．$y''(x)=0$；$U_1(y)\equiv y(0)=0$，$U_2(y)\equiv y'(1)=0$。

13．$y''(x)=0$；$U_1(y)\equiv y(0)=0$，$U_2(y)\equiv y(1)+2y'(1)=0$。

用双边格林函数求下列边值问题的解。

14．$x''(t)=f(t)$；$U_1(x)\equiv x(0)=0$，$U_2(x)\equiv x'(1)=0$。

15．$x''(t)=f(t)$；$U_1(x)\equiv x(0)=0$，$U_2(x)\equiv x(1)+2x'(1)=0$。

16．证明$\sin t$的两个相邻零点之间必有且仅有$\sin t+\cos t$的一个零点。

17．证明$\sin(\ln t)$的两个相邻零点之间有且仅有$\cos(\ln t)$的一个零点。

18．如果$x(t)$和$y(t)$分别是

$$t^2x''(t)+tx'(t)+(t^2-1)x(t)=0,\quad x(1)=0;$$

$$ty''(t)+y'(t)+ty(t)=0,\quad y(1)=0$$

的解，问，哪一个解在$t=1$的右边有第一个零点？为什么？

19．证明在区间$(1,\ \infty)$内，方程$y''+y=0$的解的零点个数不会比方程$x^2y''+xy'+y=0$的解的零点个数少。

20．找一个区间，使得方程$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+2y(x)=0$的所有非平凡解在这个区间上最多有一个零点。

*21．设$q(x)$在$[0,\ \infty]$上连续可微且有$q(x)>0$，$q'(x)>0$，又设$y(x)$是$y''(x)+q(x)y(x)=0$的解，若x_1，$x_2(x_1<x_2)$是$y'(x)$的两个相邻零点，则$|y(x_2)|\leqslant|y(x_1)|$。

*22．若$\int_0^{\infty}q(x)dx=+\infty$，则方程$y''(x)+q(x)y(x)=0$的每个解在$(0,\ \infty)$内有无穷多个零点。

第六章　微分方程组

§1　一般概念

在本章中，我们将研究含有多个未知函数的一阶微分方程组，它的标准形式可写为

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots x_n),\ (i=1,2,\cdots n) \tag{1.1}$$

其中f_i是t，x_1，x_2，…，x_n的已知函数。我们将会看到稍为复杂些的物理、力学问题，它的数学模型往往要涉及到多于一个微分方程的方程组，本章的目的就是寻求微分方程组的求解方法，并建立与其有关的理论。

对于方程组(1.1)，如果存在一组函数$x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$，它们在某一个区间上连续可微，且满足方程组(1.1)，则称函数$\varphi_i(t)$　$(i=1,2,\cdots n)$是方程组(1.1)的解。

所谓方程组(1.1)的始值问题是指，在空间$(t,x_1,\cdots,x_n)$的某区域内，求方程组的解，并且当$t=t_0$时，满足条件

$$x_i(t_0)=x_i^0.\ (i=1,2,\cdots n) \tag{1.2}$$

而(1.2)叫做初始条件。对于始值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1\ x_2,\cdots\ x_n);\\ x_i(t_0)=x_i^0,\ (i=1,2,\cdots n)\end{cases}$$

如果存在一组函数$x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$，它们在含t_0的某个区间上连续可微，并且满足方程组(1.1)和初始条件(1.2)，则称

函数$\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$为始值问题(1.1)，(1.2)的解。

一个高阶方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

这里f是$t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}$的已知函数，可以通过引进$n-1$个新的未知函数：$x_1=x'$，$x_2=x''$，$\cdots$，$x_{n-1}=x^{(n-1)}$，将它化成形如(1.1)的微分方程组：

$$\begin{cases} x'=x_1, \\ x_1'=x_2, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-2}'=x_{n-1}, \\ x_{n-1}'=f(t,\ x,\ x_1,\cdots x_{n-1}). \end{cases} \tag{1.4}$$

我们说高阶方程(1.3)与方程组(1.4)是等价的，意思是指，如果$x=\varphi(t)$是方程(1.3)的一个解，那么

$$x=\varphi(t),\quad x_1=\varphi'(t),\ \cdots,\ x_{n-1}=\varphi^{(n-1)}(t)$$

就是方程组(1.4)的一个解。反之，如果$x=\varphi(t)$，$x_1=\varphi_1(t)$，$\cdots$，$x_{n-1}=\varphi_{n-1}(t)$是方程组(1.4)的一个解，则由

$$\varphi'(t)=\varphi_1(t),\varphi''(t)=\varphi_2(t),\cdots,\ \varphi^{(n-1)}(t)=\varphi_{n-1}(t)$$

得出

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(t)=\varphi_{n-1}'(t)&=f(t,\varphi,\varphi_1,\cdots\varphi_{n-1})\\ &=f(t,\varphi,\varphi',\cdots\varphi^{(n-1)}),\end{aligned}$$

故$x=\varphi(t)$就是方程(1.3)的一个解。

下面，我们给出方程(1.3)的始值问题与方程组(1.4)的始值问题的等价概念。如果$x=\varphi(t)$是方程(1.3)满足初始条件

$$x(t_0)=x^0,\ x'(t_0)=x_1^0,\ \cdots\ x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1}^0 \tag{1.5}$$

的解，则$x=\varphi(t),x_1=\varphi'(t),\ \cdots\ x_{n-1}=\varphi^{(n-1)}(t)$就是方程组

(1.4)满足初始条件

$$x(t_0)=x^0,\ x_1(t_0)=x_1^0, \cdots\ x_{n-1}(t_0)=x_{n-1}^0 \qquad (1.6)$$

的解。反之，如果$x=\varphi(t)$，$x_1=\varphi_1(t),\cdots,x_{n-1}=\varphi_{n-1}(t)$是方程组(1.4)满足初始条件(1.6)的解，则$x=\varphi(t)$就是方程(1.3)满足初始条件(1.5)的解。类似的作法也可化高阶方程组为一阶方程组。

根据这种等阶性，我们就可以把对方程组进行研究所得到的结果，自然地过渡到高阶方程和高阶方程组上去。

关于方程组(1.1)的通解的定义，可仿第一章中通解的定义类似地给出。这里形式地写出含n个任意常数的解：

$$x_i=\varphi_i(t,c_1,c_2,\cdots,c_n),\ (i=1,2,\cdots,n)$$

就称为方程组(1.1)的通解，其中 c_i $(i=1,2,\cdots,n)$是互相独立的*。

§2 初 积 分

对于方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots x_n)\ (i=1,2,\cdots n) \qquad (2.1)$$

的求解问题，这里先介绍一个常用的方法——可积组合。它的思路就是把对一个方程所建立的初等积分法，搬到方程组中来。由于方程组(2.1)中的每一个方程，一般都含有多个未知数，这就要求我们作新的变量代换，以便得到一个只含一个新的未知函数和一个自变量的、而且容易积分的一阶方程，即形如

$$d\Phi(t,\ x_1,\ x_2\ \cdots,\ x_n)=0$$

* 即指行列式 $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2\cdots\varphi_n)}{\partial(c_1,c_2,\cdots c_n)}\neq 0$。

的方程.为此,将方程组(2.1)的一部分或全部方程进行重新组合,通过这种组合的办法引进我们所要的变量代换,这就是所谓的可积组合法。下面用例题来说明之。

例1 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}$$

的通解。

解 这个方程组显然可由二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$$

中令$\dfrac{dx}{dt}=y$得到。因此,可利用第三章的知识求得它的通解为

$$\begin{cases}x=c_1e^t+c_2e^{-t},\\ y=c_1e^t-c_2e^{-t}.\end{cases}$$

如果利用可积组合的方法,我们就可直接对方程组进行可积组合.将两个方程的两端相加,

$$\frac{d(x+y)}{dt}=x+y,$$

便得到一个可积组合,由此得

$$x+y=\bar{c}_1e^t.$$

若从第一个方程的两端减去第二个方程,又可得到一个可积组合

$$\frac{d(x-y)}{dt}=-(x-y),$$

于是有

$$x-y=\bar{c}_2e^{-t}.$$

最后，由关系式$x+y=\bar{c}_1e^t$和$x-y=\bar{c}_2e^{-t}$就可得到原方程组的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(\bar{c}_1e^t+\bar{c}_2e^{-t}\right), \\ y=\dfrac{1}{2}\left(\bar{c}_1e^t-\bar{c}_2e^{-t}\right). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{-t}, \\ y=c_1e^t-c_2e^{-t}. \end{cases}$$

例2 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x, \\ \dfrac{dz}{dt}=z+3x-y \end{cases}$$

的通解.

解 由例1知，对前两个方程进行可积组合，即可得到关系式

$$x+y=\bar{c}_1e^t,$$

$$x-y=\bar{c}_2e^{-t}.$$

显然．从两个关系式不可能得到未知函数z，但用类似的方法再作出第三个可积组合又有困难，故我们可先利用得到的关系式求出x和y，以便减少方程组中未知函数和方程的个数．由关系式得

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t},$$

$$y=c_1e^t-c_2e^{-t},$$

然后，代入第三个方程的右端，得到

$$\frac{dz}{dt}=z+2c_1e^t+4c_2e^{-t}.$$

这是关于未知函数 z 的一个一阶线性方程. 它的解可由公式给出

$$z(t)=(c_3+2c_1t)e^t-2c_2e^{-t}.$$

故原方程组的通解为

$$\begin{cases}x=c_1e^t+c_2e^{-t},\\ y=c_1e^t-c_2e^{-t},\\ z=(c_3+2c_1t)e^t-2c_2e^{-t}.\end{cases}$$

其中c_1、c_2、c_3是任意常数.

通过以上两个例题可以看出，利用可积组合能将微分方程组的求解问题，转变成求解一函数方程组的问题，或者减少微分方程组中未知函数和方程的个数以便求解，下面我们再从理论上来探讨，为此，先给出初积分的概念.

设函数$\Phi(t,x_1,x_2,\cdots x_n)$在区域$D$中是连续的，且有连续的一阶偏导数，若把方程组(2.1)的任一解$x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$代入函数Φ，所得到变量t的函数 $\Phi(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 恒等于常数c，则称关系式

$$\Phi(t,x_1,\cdots,x_n)=c \tag{2.2}$$

是方程组(2.1)的一个初积分，有时也称函数 $\Phi(t,x_1,\cdots,x_n)$ 是方程组(2.1)的初积分.

由此可见，对于方程组(2.1)的每一个可积组合均可得到它的一个初积分。并且，若Φ_1，$\Phi_2,\cdots,\Phi_k$ 是方程组(2.1)的k个初积分，那么函数$\varphi(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k)$也是方程组(2.1)的一个初积分. 这里$\varphi$是$k$个变量$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k$的任意连续可微函数.

一般说来，将方程组(2.1)的两个不同的解，分别代入(2.2)

式时得到的常数 c 是不相同的. 从几何意义上看，当 c 固定时，(2.2)式是以 $t, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标的 $n+1$ 维空间的一个 n 维曲面。由于 c 的任意性，所以(2.2)式所代表的是同一空间的一族 n 维曲面。而方程组(2.1)的解 $x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是此空间中的一条曲线，称此曲线为积分曲线。(2.2)式是方程组(2.1)的初积分，就是说方程组(2.1)的任一积分曲线，必定整个位于曲面族(2.2)中的某一个曲面上。

现在我们来分析，初积分在方程组求解中的作用。这里顺便指出，在讨论过程中用到关于方程组(2.1)的始值问题的解的存在唯一性定理，将在下一节引进。

定理6.1 设函数 $\Phi(t, x_1, \cdots, x_n)$ 在区域 D 中有连续的一阶偏导数，那么函数 Φ 是方程组(2.1)的初积分的充要条件是

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n=0 \tag{2.3}$$

证明 先证充分性，设 $x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是方程组(2.1)的任一解，因为

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Phi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))}{dt}\\
&=\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \cdot \frac{d\varphi_n}{dt}\\
&=\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n,
\end{aligned}$$

由(2.3)式得

$$\frac{d\Phi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))}{dt} \equiv 0,$$

所以

$$\Phi(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\equiv c,$$

从而函数$\Phi(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(2.1)的一个初积分。

再证必要性。设$\Phi(t,x_1,\cdots,x_n)$是(2.1)的一个初积分，则对区域D内的每一点，都有恒等式(2.3)成立。事实上，在区域D内任取一点$(t_0,\ x_1,\cdots,x_n^0)$，方程组(2.1)就有适合条件$x_i(t_0)=x_i^0$的唯一解$x_i=\varphi_i(t)\ \ (i=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$\Phi(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\equiv c.$$

从而

$$\frac{d\Phi(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))}{dt}\equiv 0,$$

特别当$t=t_0$时，有

$$\left.\frac{d\Phi(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\equiv 0,$$

即

$$\frac{\partial\Phi(t_0,x_1^0\cdots,x_n^0)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_1}f_1(t_0,\ x_1^0,$$

$$\cdots,\ x_n^0)+\cdots+\frac{\partial\Phi(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_n}f_n(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)\equiv 0.$$

由于点$(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$的任意性，所以在区域D中有恒等式(2.3)成立。

对于k个初积分$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k$，若至少有一个行列式

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k)}{\partial(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_k})}\neq 0,$$

则称它们是互相独立的，其中$x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_k}$是未知函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$中某$k$个函数。

定理6.2 如果已知方程组(2.1)的k个互相独立的初积分，则

可将方程组(2.1)的求解问题变为只含 $n-k$ 个方程的方程组的求解问题。

证明　设

$$\Phi_i(t,x_1,\cdots,x_n)=c_i\ \ (i=1,2,\cdots,k) \tag{2.4}$$

是方程组(2.1)的k个互相独立的初积分，因而行列式

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k)}{\partial(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_k})}$$

中至少有一个不等于零，不妨设这个行列式为

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_k)},$$

于是(2.4)存在着隐函数组

$$x_i=\omega_i(t,x_{k+1},\cdots,x_n,c_1,\cdots,c_k),\quad (i=1,2,\cdots,k)$$

把这k个未知函数代入方程组(2.1)的后$n-k$个方程的右端，就得到只含$n-k$个未知函数x_{k+1}，x_{k+2}，$\cdots$，x_n的方程组

$$\frac{dx_j}{dt}=f_j(t,\omega_1(t,x_{k+1},\cdots,x_n,c_1,\cdots,c_k),\cdots,\omega_k(t,x_{k+1},$$

$$\cdots,x_n,c_1,\cdots,c_k),x_{k+1},\cdots,x_n),$$

$$(j=k+1,k+2,\cdots,n). \tag{2.5}$$

现证，若$x_j=\varphi_j(t,c_1,\cdots,c_k)(j=k+1,\cdots,n)$是方程组(2.5)的一个解，那么

$$\begin{cases} x_i=\omega_i(t,\varphi_{k+1}(t,c_1,\cdots,c_k),\cdots,\varphi_n(t,c_1,\cdots,c_k),c_1, \\ \quad\cdots,c_k) \qquad (i=1,2,\cdots,k) \\ x_j=\varphi_j(t,c_1,\cdots,c_k)\ \ (j=k+1,\cdots,n) \end{cases} \tag{2.6}$$

就是方程组(2.1)的一个解。事实上，函数组(2.6)显然满足方程组(2.1)的后$n-k$个方程，因此只要证明(2.6)也满足前k个方程即可．由

$$x_i = \omega_i(t, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_n, c_1, \cdots, c_k) \equiv \varphi_i(t, c_1, \cdots, c_k)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, k)$$

及

$$\Phi_i(t, \omega_1, \cdots, \omega_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \equiv c_i$$

$$(i = 1, 2, \cdots, k)$$

得

$$\Phi_i(t, \varphi_1(t, c_1, \cdots, c_k), \cdots, \varphi_n(t, c_1, \cdots, c_k)) \equiv c_i,$$

$$(i = 1, 2, \cdots, k).$$

再对t微分，得

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{2.7}$$

根据定理1，有

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} f_j \equiv 0 \quad (i = 1, 2 \cdots, k), \tag{2.8}$$

用(2.7)减去(2.8)，得

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \left[\frac{d\varphi_j}{dt} - f_j(t, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \right] \equiv 0 (i = 1, 2, \cdots, k),$$

由于$\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_k)} \neq 0$，故有

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

所以$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$满足(2.1)的前$k$个方程。

最后证明，方程组(2.1)的任一解，可由方程组(2.5)及关系式(2.4)确定。设$\overline{\varphi}_j(t)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$是方程组(2.1)的任一解，则有

$$\Phi_i(t, \bar{\varphi}_1(t), \cdots, \bar{\varphi}_n(t)) \equiv \bar{c}_i \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

且

$$\bar{\varphi}_i(t) = \omega_i(t, \bar{\varphi}_{k+1}(t), \cdots, \bar{\varphi}_n(t), \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_k)$$

$$(i=1, 2, \cdots, k).$$

若 $\varphi_{k+1}(t), \cdots, \varphi_n(t)$是满足方程组(2.5)和初始条件$\varphi_j(t_0) = \bar{\varphi}_j(t_0)$ $(j=k+1, \cdots, n)$ 的解，令

$$\varphi_i(t) \equiv \omega_i(t, \varphi_{k+1}(t), \cdots, \varphi_n(t), \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_k) \ (i=1,2,\cdots k),$$

于是

$$\varphi_i(t_0) \equiv \omega_i(t_0, \varphi_{k+1}(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0), \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_k)$$

$$\equiv \omega_i(t_0, \bar{\varphi}_{k+1}(t_0), \cdots, \bar{\varphi}_n(t_0), \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_k)$$

$$\equiv \bar{\varphi}_i(t_0) \qquad (i=1,2,\cdots,k).$$

根据上面的证明知，这样得到的函数组 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 一定是方程组(2．1)的解。

然而方程组（2．1）满足同一初始条件的两个解必须是相同的，所以

$$\varphi_j(t) \equiv \bar{\varphi}_j(t) \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

这就表明，求解方程组（2．1）的问题完全可以变为求解降低了k维的方程组（2．5）。

推论 如果知道方程组（2．1）的n个互相独立的初积分

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, \cdots, x_n) = c_1, \\ \Phi_2(t, x_1, \cdots, x_n) = c_2, \\ \cdots\cdots \\ \Phi_n(t, x_1, \cdots, x_n) \equiv c_n. \end{cases} \tag{2.9}$$

那么由（2.9）确定的隐函数组，就是（2.1）的通解。

通过以上的讨论可以看出，为了求解方程组（2.1），只需要

求出它的n个相互独立的初积分即可。

为了用可积组合求解方程组（2.1），我们常将（2.1）改写成所谓对称形式：

$$\frac{dx_1}{f_1}=\frac{dx_2}{f_2}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n}=\frac{dt}{1},$$

这样就可利用比例的性质，给寻求可积组合提供方便。

例3 求方程组

$$\frac{dx}{xt}=\frac{dy}{yt}=\frac{dt}{xy}$$

的通解。

解 它是方程组 $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{y}$，$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{x}$ 的对称形式。由前两项得到

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0,$$

积分得到一个初积分

$$\frac{x}{y}=c_1.$$

代入后两项得到

$$\frac{dy}{t}=\frac{dt}{c_1y},$$

积分后又得到一个初积分

$$c_1y^2-t^2=c_2, \quad 即 \quad xy-t^2=c_2.$$

直接验证可知这两个初积分是互相独立的。从而由

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=c_1 & ,\\ xy-t^2=c_2 & ,\end{cases}$$

即可把x和y解为t的函数

$$
\begin{cases}
x = \pm\sqrt{c_1(c_2 + t^2)}, \\
y = \pm\sqrt{\dfrac{c_2 + t^2}{c_1}}.
\end{cases}
$$

这就是原方程组的通解。

例4 求方程组

$$
\frac{dx}{e^x + u} = \frac{dy}{e^y + u} = \frac{du}{u^2 - e^{x+y}}
$$

的通解

解 将 $\dfrac{du}{e^x + u}$ 的分子分母同乘以e^y，再与 $\dfrac{du}{u^2 - e^{x+y}}$ 的分子分母各自相加，然后令它等于$\dfrac{du}{e^y + u}$

即

$$
\frac{e^y dx}{u(e^y + u)} = \frac{dy}{e^y + u},
$$

从而得到

$$
dx + d(ue^{-y}) = 0,
$$

积分后就得到第一个初积分

$$
x + ue^{-y} = c_1.
$$

类似的作法，即可得第二个初积分

$$
y + ue^{-x} = c_2.
$$

显然这两个初积分是互相独立的，所以方程组的隐式通解可写为

$$
\begin{cases}
x + ue^{-y} = c_1, \\
y + ue^{-x} = c_2.
\end{cases}
$$

§3 存在唯一性定理

这一节我们讨论一阶微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n). \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.1}$$

满足始值条件

$$x_i(t_0)=x_i^0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.2}$$

的解的存在唯一性问题。为了方便，我们引用向量和矩阵符号，这里对它们的有关概念先作简单地介绍。

1. 向量函数和矩阵函数 我们所讲的n维向量，均指n维列向量，如以 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为分量的n维向量 $\mathbf{X}$，可写成$n\times 1$矩阵形式，即

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T.$$

这里T表示转置。如果 x_i 是t的函数，则称$\mathbf{X}$为t的向量函数；如果x_i是常数，则称$\mathbf{X}$为常向量。

对向量所能施行的各种运算，最简单的便是两个向量$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$的和及数c与向量$\mathbf{X}$的积，我们可作如下的定义：

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \qquad c\mathbf{X}=\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}.$$

利用求极限的方法，也可以定义向量函数$\mathbf{X}$的积分为

$$\int\mathbf{X}dt=\begin{pmatrix} \int x_1dt \\ \int x_2dt \\ \vdots \\ \int x_ndt \end{pmatrix}.$$

为了对向量进行估计，我们定义它的模或范数为

$$\| \mathbf{X} \| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

根据定义，容易得到

$$\| \mathbf{X} + \mathbf{Y} \| \leqslant \| \mathbf{X} \| + \| \mathbf{Y} \|,$$

$$\| c\mathbf{X} \| = |c| \cdot \| \mathbf{X} \|,$$

$$\| \int_a^b \mathbf{X} dt \| \leqslant | \int_a^b \| \mathbf{X} \| dt |.$$

关于$n \times n$矩阵的概念，我们记

$$A = (a_{ij}) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

为n阶方阵，其中a_{ij}称为矩阵A的元素。如果a_{ij}是t的函数，则称A为矩阵函数；如果a_{ij}在区间(α, β)上都是连续的，则称矩阵函数A在此区间上连续。

矩阵 A, B 的和，可定义为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

而它们的积，可定义为

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right),$$

一般说来$AB \neq BA$。

对于矩阵A的模或范数，定义为

$$\| A \| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

显然有

$$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|,$$

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|,$$

$$\| cA \| = |c| \cdot \| A \|,$$

$$\| A\mathbf{X} \| \leqslant \| A \| \cdot \| \mathbf{X} \|.$$

对于定义在区间(α, β)上的向量函数$\mathbf{X}$，我们说它在这个区

间上是连续（可微）的，是指它的每一个分量$x_i(i=1,2,\cdots n)$在同一区间上都是连续（可微）的，并且向量函数$\boldsymbol{X}$关于t的微分，可写为

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix}$$

对于$n\times n$矩阵函数A的微分和积分，也可以类似地定义。

向量函数序列$\{\boldsymbol{X}_k\}$　$(\boldsymbol{X}_k=(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})^T)$我们称它在区间$(\alpha,\beta)$上是(一致)收敛的，是指对每一个$i(i=1,2,\cdots,n)$函数序列$\{x_{ik}\}$在区间$(\alpha,\beta)$上都是(一致)收敛的。

向量函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{X}_k$，我们称它在区间$(\alpha,\beta)$上是(一致)收敛的，是指其部分和组成的向量函数序列$\{S_n(t)\}\left(S_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{X}_k\right)$在区间$(\alpha,\beta)$上是(一致)收敛的。

对于一般的矩阵函数序列，也可以给出类似的定义。

2.存在唯一性定理　现在对始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ x_i(t_0)=x_i^0\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

建立其解的存在唯一性定理。

定理6.3　设函数$f_i(t,x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$在$n+1$维空间的闭区域

$$D:\ t_0-a\leqslant t\leqslant t_0+a,\quad x_i^0-b\leqslant x_i\leqslant x_i^0+b$$

$(i=1,2,\cdots,n)$

上，满足条件：

1）所有的函数 $f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 连续，因而存在着正数M，使得$|f_i|\leqslant M$；

2）所有的函数 $f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足李普希兹条件

$$|f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)-f_i(t,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)|$$

$$\leqslant L\sum_{j=1}^{n}|x_j-\bar{x}_j|,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中$L>0$是与$t,x_j,\ \bar{x}_j$无关的常数。

则方程组（3.1）在区间 $|t-t_0|\leqslant h_0$ 上存在着满足始值条件（3.2）的唯一解。这里$h_0=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$。

这个定理的证明完全类似于第四章§1的定理4.1，因为只要把始值问题（2.1），（2.2）写成向量形式，问题就显得更为清楚。记

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\\f_2(t,x_1,\cdots,x_n)\\\vdots\\f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}.$$

则方程组（3.1）可表为向量方程

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X})\qquad(3.1)'$$

初始条件可写为

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0 \tag{3.2)'$$

这里$\boldsymbol{X}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^T$。这样一来，用向量记法定理6.3就可写成：

定理6.3′ 设向量函数$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X})$在 $n+1$维空间中，由不等式

$$|t-t_0|\leqslant a, \qquad \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^0\|\leqslant \bar{b}$$

确定的闭区域D上，(其中$\bar{b}=nb$)满足条件

1) $\boldsymbol{F}$ 连续，因而存在正数$\widetilde{M}=\max\limits_{(t,x)\in D}\|\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X})\|(=nM)$

2) $\boldsymbol{F}$关于$\boldsymbol{X}$满足李普希兹条件

$$\|\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X})-\boldsymbol{F}(t,\overline{\boldsymbol{X}})\|\leqslant\bar{L}\ \|\boldsymbol{X}-\overline{\boldsymbol{X}}\|,$$

则方程 (3.1)′在区间$|t-t^0|\leqslant h_0$ 上存在满足初始条件 (3.2)′的唯一解。这里 $h_0=\min\left(a,\dfrac{\bar{b}}{\widetilde{M}}\right)$。

可以看出，要证明定理6.3′几乎都是第四章中存在唯一性定理的重复，为了节省篇幅，在此从略。

如果方程组(3.1) 的形式是

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t)\ ,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t)\ ,\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t)\ .\end{cases} \tag{3.3}$$

这里出现在方程中的所有未知函数和它们的导数都是一次的，故称方程组(3.3)为线性方程组。其中 系数 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$和自由项$f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$都是区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上的已知函数。若

记$A(t)=(a_{ij}(t))$，$\boldsymbol{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^T$，$\boldsymbol{X}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$，于是方程组(3.3)就可写成

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=A(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t) \tag{3.3'}$$

对于线性方程组，在系数和自由项都在区间I上连续的条件下，由初始条件(3.2)所确定的解在整个区间上存在，并且是唯一的。

定理6.4 若系数矩阵$A(t)$和向量函数$\boldsymbol{F}(t)$都在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续，则对$t_0\in[\alpha,\beta]$及常向量$\boldsymbol{X}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^T$，方程组(3.3)′在整个区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上存在满足初始条件

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0 \tag{3.2'}$$

的唯一解。

证明 先证存在性，容易看出，方程组(3.3)′的始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}=A(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t);\\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0\end{cases},$$

等价于积分方程组

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau. \tag{3.4}$$

因此，我们只要证明积分方程组(3.4)在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上有且仅有一个连续解。

下面用毕卡的逐次逼近法来证明．我们取零次近似为

$$\boldsymbol{X}_0(t)=\boldsymbol{X}^0,$$

然后把它代入(3.4)的右端，便得到函数

$$\boldsymbol{X}_1(t)=\boldsymbol{X}^0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\boldsymbol{X}_0(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau,$$

称它为一次近似。再将$\boldsymbol{X}_1(t)$代入(3.4)的右端，得到

$$\boldsymbol{X}_2(t)=\boldsymbol{X}^0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\boldsymbol{X}_1(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau$$

称它为二次近似。继续作下去，我们就得到向量函数序列

$$\boldsymbol{X}_k(t)=\boldsymbol{X}^0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau \tag{3.5}$$

$$(k=1,2,\cdots.)$$

如果对某个 k 有 $\boldsymbol{X}_{k+1}(t)=\boldsymbol{X}_k(t)$，这时 $\boldsymbol{X}_k(t)$ 就是积分方程组的解，或称 $\boldsymbol{X}_k(t)$ 为 k 次近似。显然，这些向量函数在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上都是连续的。

现证明序列(3.5)在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛。为此，我们考虑向量函数级数

$$\boldsymbol{X}_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{X}_k(t)-\boldsymbol{X}_{k-1}(t)] \tag{3.6}$$

为了证明级数(3.6)的一致收敛性，估计它的各项的模，由于 $A(t)$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$ 都在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上连续，故存在着正数 M，当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时，有

$$\|A(t)\|\leqslant M,\quad \|\boldsymbol{F}(t)\|\leqslant M,$$

由于

$$\boldsymbol{X}_1(t)-\boldsymbol{X}_0(t)=\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\boldsymbol{X}_0(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]\,d\tau,$$

故有

$$\|\boldsymbol{X}_1(t)-\boldsymbol{X}_0(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\boldsymbol{X}_0(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)\|d\tau\right.$$

$$\leqslant M(\|\boldsymbol{X}^0\|+1)|t-t_0|,$$

若记 $\|\boldsymbol{X}^0\|+1=N$，于是

$$\|\boldsymbol{X}_1(t)-\boldsymbol{X}_0(t)\|\leqslant NM|t-t_0|, \tag{3.7}$$

又由

$$\boldsymbol{X}_2(t)-\boldsymbol{X}_1(t)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)[\boldsymbol{X}_1(\tau)-\boldsymbol{X}_0(\tau)]d\tau,$$

利用(3.7)得到

$$\|\boldsymbol{X}_2(t)-\boldsymbol{X}_1(t)\|\leqslant NM^2\left|\int_{t_0}^{t}|\tau-t_0|d\tau\right|$$

$$=NM^2\frac{|t-t_0|^2}{2!}.$$

可用数学归纳法证明，当$t\in[\alpha,\beta]$时，对一切正整数k都有不等式

$$\|\boldsymbol{X}_k(t)-\boldsymbol{X}_{k-1}(t)\|\leqslant NM^k\frac{|t-t_0|^k}{k!} \tag{3.8}$$

成立。

设$k=n$时(3.8)成立，那么当$k=n+1$时，由

$$\boldsymbol{X}_{n+1}(t)-\boldsymbol{X}_n(t)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)[\boldsymbol{X}_n(\tau)-\boldsymbol{X}_{n-1}(\tau)]d\tau,$$

就有

$$\|\boldsymbol{X}_{n+1}(t)-\boldsymbol{X}_n(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|\|\boldsymbol{X}_n(\tau)-\boldsymbol{X}_{n-1}(\tau)\|d\tau\right|.$$

$$\leqslant NM^{n+1}\left|\int_{t_0}^{t}\frac{|\tau-t_0|^n}{n!}d\tau\right|$$

$$=NM^{n+1}\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

可见(3.8)对一切正整数n成立。

由于$|t-t_0|\leqslant\beta-\alpha$，故有

$$\|\boldsymbol{X}_k(t)-\boldsymbol{X}_{k-1}(t)\|\leqslant NM^k\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}\qquad(k=1,2,\cdots.)$$

而数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{NM^k(\beta-\alpha)^k}{k!}$$

是收敛的。所以，由维尔斯特拉斯定理知，级数(3.6)在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上一致收敛。从而向量函数序列$\{\boldsymbol{X}_k(t)\}$也在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上一致收敛。设

$$\boldsymbol{X}_k(t)\to\boldsymbol{X}(t)\qquad(k\to\infty)$$

由于$\boldsymbol{X}_k(t)(k=1,2,\cdots.)$都是连续的，所以极限函数$\boldsymbol{X}(t)$在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上连续。

现对(3.5)式两端取极限，让$k\to\infty$，就得到

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau$$

这说明向量函数$\boldsymbol{X}(t)$在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上是积分方程组(3.4)的连续解，显然满足$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0$.因而也是始值问题(3.3)′(3,2)′的解。

再证唯一性。设积分方程组(3,4)还有一个不同于$\boldsymbol{X}(t)$的连续解$\overline{\boldsymbol{X}}(t)$，于是有

$$\overline{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{X}^0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\overline{\boldsymbol{X}}(\tau)+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau,$$

利用(3.5)，得到

$$\boldsymbol{X}_k(t)-\overline{\boldsymbol{X}}(t)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)[\boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)-\overline{\boldsymbol{X}}(\tau)]d\tau,$$

由于函数$\overline{X}(t)$是连续的，故存在正数$\overline{M}$，当$t\in[\alpha,\beta]$时，有$\|\overline{\boldsymbol{X}}(t)\|\leqslant\overline{M}$，记$N=\|\boldsymbol{X}^0\|+\overline{M}$，

这里我们也可象(3.8)一样进行估计，类似地得到

$$\|\boldsymbol{X}_k(t)-\overline{\boldsymbol{X}}(t)\|\leqslant NM^k\frac{|t-t_0|^k}{k!},$$

从而有

$$\|\boldsymbol{X}_k(t)-\overline{\boldsymbol{X}}(t)\|\leqslant NM^k\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}.$$

取极限，让$k\to\infty$，不等式的右端正好是正项收敛级数的通项，故

$$NM^k\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}\longrightarrow 0,\quad (k\to\infty)$$

这说明序列$\{\boldsymbol{X}_k(t)\}$在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上一致收敛于函数$\overline{\boldsymbol{X}}(t)$。然而序列$\{\boldsymbol{X}_k(t)\}$的极限函数是唯一的，所以

$$\overline{\boldsymbol{X}}(t)\equiv\boldsymbol{X}(t),$$

定理证毕。

§4 线性方程组

对于线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t),\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t).\end{cases}\tag{4.1}$$

或

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=A(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)\tag{4.1$'$}$$

我们已经证明，在前面假设下它的始值问题存在唯一解。并且其解的定义区间不再是局部的，而是大范围的，即在整个区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上都有意义。

当自由项$f_i(t)=0(i=1,2,\cdots,n)$时，即方程组，

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=A(t)\boldsymbol{X},$$

我们称为齐次的，而方程组(4.1)称为非齐次的。这里引入算子记号，用等式

$$L[\boldsymbol{X}]=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}-A(t)\boldsymbol{X}$$

定义线性算子L。于是方程组(4.1)就可写成更简单的形式

$$L[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{F}(t)。$$

算子L具有下述性质：

i) $L[c\boldsymbol{X}]=cL[\boldsymbol{X}]$，其中$c$是任意常数，

ii) $L[\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2]=L[\boldsymbol{X}_1]+L[\boldsymbol{X}_2]$。

下面仅对性质*ii*) 证明如下：

$$\begin{aligned}L[\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2]&=\frac{d}{dt}[\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2]-A(t)[\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2]\\&=\frac{d\boldsymbol{X}_1}{dt}-A(t)\boldsymbol{X}_1+\frac{d\boldsymbol{X}_2}{dt}-A(t)\boldsymbol{X}_2\\&=L[\boldsymbol{X}_1]+L[\boldsymbol{X}_2]。\quad\text{(证毕)}\end{aligned}$$

由*i*)，*ii*) 可推得

$$L\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{X}_i\right]=\sum_{i=1}^{n}c_iL[\boldsymbol{X}_i],$$

其中$c_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意常数。

1.线性齐次方程组。即

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}-A(t)\boldsymbol{X}=0。\tag{4.2}$$

若引用算子记号，(4.2)可写成

$$L[\boldsymbol{X}]=0。$$

根据算子 L 的特性，我们可得出线性齐次方程组所具有的简单性质。

性质1° 设 $\boldsymbol{X}$ 是齐次方程组(4.2)的解，如果 $\boldsymbol{X}(t_0)=0$ $(\alpha<t_0<\beta)$，则在区间 $\alpha<t<\beta$ 上，$\boldsymbol{X}\equiv 0$。

证明 显然方程组(4.2)的平凡解是满足零初始条件的。根据解的唯一性知，$\boldsymbol{X}\equiv 0$。

性质2° 若 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 是(4.2)的两个解，则 $c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2$ 也是(4.2)的解，其中 c_1,c_2 是任意常数。

证明 因为

$$L[c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2]=c_1L[\boldsymbol{X}_1]+c_2L[\boldsymbol{X}_2]$$

而 $$L[\boldsymbol{X}_i]=0 \quad (i=1,2),$$

所以 $c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2$ 是方程组(4.2)的解。

通常称性质 2 为叠加原理，显然对于任意有限个解也成立。

性质3° 若实系数方程组(4.2)有复值解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}+i\boldsymbol{V}$，则其实部 $\mathrm{Re}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}$ 及虚部 $\mathrm{I_m}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{V}$ 都是该方程的解。

证明 因为 $L[\boldsymbol{U}+i\boldsymbol{V}]=0$，利用算子 L 的性质，有

$$L[\boldsymbol{U}+i\boldsymbol{V}]=L[\boldsymbol{U}]+iL[\boldsymbol{V}]=0,$$

所以

$$L[\boldsymbol{U}]=0,\ L[\boldsymbol{V}]=0。$$

对于定义在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的向量函数 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$，如果存在 m 个不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使恒等式

$$c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{X}_m\equiv 0 \tag{4.3}$$

成立，则称它们在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是线性相关的，否则，称 $\boldsymbol{X}_i$ $(i=1,2,\cdots,m.)$ 是线性无关的。

例 1 证明 n 个向量函数

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{X}_n=\begin{pmatrix} t^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

在任何区间上都是线性无关的。

证明 若这 n 个向量函数相关，则存在不全为零的常数 c_i $(i=1,2,\cdots,n)$，使 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\mathbf{X}_i\equiv 0$，即

$$c_1\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix} t^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\equiv 0.$$

由于 $c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n$ 是一个不高于 n 次的多项式，故它的零点不会多于 n 个，从而 $c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n$ 不可能在任何区间上恒为零，所以 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_n$ 是线性无关的。证毕。

例 2 向量函数组 $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$，$\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ 在任何区间上线性无关。

证明 若 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2$ 相关，则存在不全为零的 c_1,c_2，使 $c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2\equiv 0$，即

$$\begin{cases} c_1\cos t+c_2\sin t=0, \\ -c_1\sin t+c_2\cos t=0. \end{cases}$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以 $c_1=c_2=0$，故 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 线性无关。

根据向量函数线性相关的定义，由(4.3)式可以推出：如果 n

个向量函数 $\boldsymbol{X}_i=(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})^T(i=1,2,\cdots,n)$在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上是线性相关的，那么由它们的分量构成的$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots\cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

在该区间上必恒等于零。我们把由分量构成的行列式(4.4)称为向量函数组 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 的朗斯基行列式，并以$W[t]$表示之。

我们知道，当$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$是常向量时，行列式(4.4)等于零是它们线性相关的充要条件。但对向量函数组 $\boldsymbol{X}_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 来说，朗斯基行列式等于零只能是它们在某个区间上线性相关的必要条件。例如，定义在任何区间上的两个向量函数$\boldsymbol{X}_1=\binom{t}{t}$和$\boldsymbol{X}_2=\binom{t^2}{t^2}$，显然由其分量构成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{vmatrix}\equiv 0,$$

然而$\boldsymbol{X}_1$和$\boldsymbol{X}_2$在任何区间上都是线性无关的。

定理6.5 设$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$是齐次方程组(4.2)的任一组解，若存在$t_0\in(\alpha,\beta)$，使得$W[t_0]=0$，则$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$在区间$(\alpha,\beta)$上是线性相关的，因而有$W[t]\equiv 0$。

证明　因为$W[t_0]=0$，所以常向量组$\boldsymbol{X}_1(t_0),\boldsymbol{X}_2(t_0),\cdots,\boldsymbol{X}_n(t_0)$是线性相关的，即存在不全为零的常数$C_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\boldsymbol{X}_i(t_0)=0,$$

对于这些C_i，作函数

$$\boldsymbol{X}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i(t),$$

显然$\boldsymbol{X}(t_0)=0$，且由叠加原理知$\boldsymbol{X}(t)$是(4.2)的解，根据性质1，有

$$\boldsymbol{X}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i(t)\equiv 0.$$

所以$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$在区间$(\alpha,\beta)$上是线性相关的。

这个定理告诉我们，当向量函数组$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$是齐次方程组(4.2)的解时，$W[t]=0$ 就是它们在某个区间上线性相关的充要条件。

定理6.6 设$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$是齐次方程(4.2)的一个线性无关解组，则它们的线性组合

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i$$

就是方程组(4.2)的通解。

证明 设$\boldsymbol{X}(t)$是齐次方程组(4.2)的任一解，它满足初始条件$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0$，这里$\boldsymbol{X}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^T$，因此我们只要能够证明，通过对任意常数$C_i$的适当选取，就可使

$$\boldsymbol{X}(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i.$$

为此，设$\boldsymbol{X}_i(t_0)=\boldsymbol{X}_i^0(i=1,2,\cdots,n)$，显然$\boldsymbol{X}_i^0$是$n$维向量空间的基底。令

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i^0=\boldsymbol{X}^0,$$

即可求出$C_i=\overline{C}_i(i=1,2,\cdots,n)$，然后对这些$C_i$作函数

$$\overline{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{i=1}^{n}\overline{C_i}\boldsymbol{X}_i,$$

由叠加原理知$\overline{\boldsymbol{X}}(t)$是(4.2)的解。而

$$\overline{\boldsymbol{X}}(t_0)=\sum_{i=1}^{n}\overline{C_i}\boldsymbol{X}_i(t_0)=\sum_{i=1}^{n}\overline{C_i}\boldsymbol{X}_i^0=\boldsymbol{X}^0,$$

说明向量函数$\overline{\boldsymbol{X}}(t)$与$\boldsymbol{X}(t)$ 满足同一个初始条件。根据存在唯一性定理，即得

$$\boldsymbol{X}(t)\equiv\overline{\boldsymbol{X}}(t)。$$

现在关于线性齐次方程组的通解结构问题，已经清楚了，依据定理6.6，只要知道了方程组(4.2)的n个线性无关解，就可写出它的通解。我们就把这样的解组，称为齐次方程组(4.2) 的基本解组。对于方程组(4.2)，它的基本解组总是存在的。例如，任取n个线性无关的常向量$\boldsymbol{X}_1^0=(1,0,\cdots,0)^T$， $\boldsymbol{X}_2^0=(0,1,\cdots,0)^T$，$\cdots$，$\boldsymbol{X}_n^0=(0,0,\cdots,1)^T$。然后分别以$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_i^0(i=1,2,\cdots,n)$为初始条件，对方程组(4.2) 求解，根据存在唯一性定理，有解$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$，则$\boldsymbol{X}_i$就是齐次方程组(4.2) 的一个基本解组。

这样一来，线性齐次方程组(4.2) 的所有解构成了一个解空间，这个解空间是一个n维线性空间。

例3 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}$$

的通解。

解 不难验证，$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$和 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}$都是方程组

的解。又因

$$W[t]=\begin{vmatrix} \cos t, \sin t \\ -\sin t, \cos t \end{vmatrix}=1$$

所以 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 可构成方程组的一个基本解组。故方程组的通解是

$$\boldsymbol{X}(t)=C_1\boldsymbol{X}_1+C_2\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix} c_1\cos t+c_2\sin t \\ -c_1\sin t+c_2\cos t \end{pmatrix}.$$

最后，介绍一个公式，我们称它为刘维尔公式。

设 $\boldsymbol{X}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是线性齐次方程组（4.2）的任一解组，则它的朗斯基行列式可写为

$$W[t]=W[t_0]e^{\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)dt} \tag{4.5}$$

根据朗斯基行列式的定义，我们对 $W[t]$ 就 t 求导。有

$$W'[t]=\begin{vmatrix} x_{11}' & x_{12}' & \cdots & x_{1n}' \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21}' & x_{22}' & \cdots & x_{2n}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}' & x_{n2}' & \cdots & x_{nn}' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{1i}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n}a_{1i}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{1i}x_{in} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_{in} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}(t)W[t] + a_{22}(t)W[t] + \cdots + a_{nn}(t)W[t]。
$$

于是得到关系式

$$
W'[t] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\right)W[t] = 0。 \tag{4.6}
$$

(4.6)是一个关于$W[t]$的一阶线性微分方程，解出$W[t]$即得刘维尔公式(4.5)。这个公式在微分方程的理论研究中是很有用的。

从刘维尔公式可以直接推出，线性齐次方程组(4.2)的解组的朗斯基行列式$W[t]$，只有两种可能，或者$W[t]\equiv 0$(当$W[t_0]=0$时)，或者$W[t]\neq 0$(当$W[t_0]\neq 0$时)。

2.线性非齐次方程组. 即

$$
\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} - A(t)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}(t), \tag{4.7}
$$

若用算子记号，(4.5)可写成

$$
L[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{F}(t),
$$

关于线性非齐次方程组(4.7)的简单性质，也可利用算子L的性质得出：

性质1° 若$\widetilde{\boldsymbol{X}}$是非齐次方程组(4.7)的解，而$\boldsymbol{X}$是(4.7)对

应的齐次方程组(4.2)的解，则$\widetilde{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{X}$是非齐次方程组（4.7）的解。

证明　由算子L的性质2,有

$$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{X}]=L[\widetilde{\boldsymbol{X}}]+L[\boldsymbol{X}],$$

而$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}]=\boldsymbol{F}$，$L[\boldsymbol{X}]=0$，所以

$$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{F},$$

性质2°　若$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1$,$\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$都是非齐次方程组(4.7)的解，则$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1-\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$是对应的齐次方程组(4.2)的解。

证明　因为

$$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1-\widetilde{\boldsymbol{X}}_2]=L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1]-L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_2],$$

而$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1]=L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_2]=\boldsymbol{F}$，所以

$$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1-\widetilde{\boldsymbol{X}}_2]=0.$$

性质3°　若$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1$是$L[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{F}_1$的解，$\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$是$L[\boldsymbol{X}_2]=\boldsymbol{F}_2$的解，则$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1+\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$是$L[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$的解。

证明　利用算子L的性质2,即得

$$L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1+\widetilde{\boldsymbol{X}}_2]=L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1]+L[\widetilde{\boldsymbol{X}}_2]=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

我们把性质3称为非齐次方程组的叠加原理，显然对任意有限个非齐次方程组也是成立的。

定理6.7　设$\widetilde{\boldsymbol{X}}$是非齐次方程组(4.7)的一个特解，而$\sum_{i=1}^{n} C_i\boldsymbol{X}_i$是应齐次方程组(4.2)的通解。则

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\boldsymbol{X}_i+\widetilde{\boldsymbol{X}}$$

就是非齐次方程组(4.7)的通解。

证明　设$\boldsymbol{X}$是(4.7)的任一解，于是作向量函数

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}-\widetilde{\boldsymbol{X}},$$

由性质2知，$\boldsymbol{Y}$是对应齐次方程组(4.2)的解。根据定理6.6存在常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$使得

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i,$$

从而

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i+\widetilde{\boldsymbol{X}}.$$

由定理6.7知，要写出非齐次方程组(4.7)的通解，必须先求出它的一个特解。常数变易法就是求非齐次方程组(4.7)的特解的一般方法。

设 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{X}_i$是对应齐次方程组(4.2)的通解，我们将任意常数$C_i$看成为$t$的待定函数$C_i(t)$，然后将

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\boldsymbol{X}_i \tag{4.8}$$

代入非齐次方程组(4.7)得

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(t)\boldsymbol{X}+\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\frac{d\boldsymbol{X}_i}{dt}=A\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{F}.$$

因为$\dfrac{d\boldsymbol{X}_i}{dt}=A\boldsymbol{X}_i$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(t)\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{F} \tag{4.9}$$

这是含有n个未知函数$C_i'(t)(i=1,2\cdots,n)$ 的n个方程所构成的方程组,其系数行列式正好就是(4.2)的基本解组$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$的朗斯基行列式，显然，$W[t]\neq 0$，故由(4.9)可将所有的$C_i(t)$确定出来，即

$$C_i'(t)=\varphi_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

积分得

$$C_i(t)=\int\varphi_i(t)dt \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

代入(4.8)即得非齐次方程组(4.7)的一个特解。

例4 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\dfrac{1}{\sin t},\\ \dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}$$

的通解。

解 由例3知,对应齐次方程组的通解为

$$\begin{cases}x=c_1\cos t+c_2\sin t,\\ y=-c_1\sin t+c_2\cos t,\end{cases}$$

变易常数

$$\begin{cases}x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t,\\ y=-c_1(t)\sin t+c_2(t)\cos t,\end{cases}$$

将上式代入原方程组，得

$$\begin{cases}c_1'(t)\cos t+c_2'(t)\sin t=\dfrac{1}{\sin t},\\ -c_1'(t)\sin t+c_2'(t)\cos t=0,\end{cases}$$

故

$$c_1'(t)=\frac{\cos t}{\sin t},\quad c_1(t)=\ln|\sin t|,$$

$$c_2'(t)=1,\quad c_2(t)=t.$$

所以通解为

$$\begin{cases} x=c_1\cos t+c_2\sin t+\cos t\ln|\sin t|+t\sin t, \\ y=-c_1\sin t+c_2\cos t-\sin t\ln|\sin t|+t\cos t. \end{cases}$$

§5 常系数线性方程组

在上一节讨论中，我们建立了线性微分方程组的一般理论，解决了线性微分方程组的解的结构问题，关于求解在实践中除了在不多的情况下可得到具体的结果外，一般地讲，如何求出解来，还有待进一步讨论。如果线性方程组(4.1)的系数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots n)$都是常数时，那么它的求解问题就可通过代数方法得到解决。正因为如此，所以它在应用上也就相当广泛。我们把这一类方程组称为常系数线性微分方程组，它的形式可写为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(t), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

这里$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是常数。

对于常系数线性微分方程组，有时要把它化为一个高阶方程来积分，不过这种方法只对由两个或三个方程构成的方程组有效。对一般的情形，还是按§4建立的理论去求它的通解。我们知道，问题最终还是归结为去求常系数线性齐次方程组的基本解组，所以这就是本节要着重讨论的内容。

设线性齐次方程组为

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n,\end{cases} \tag{5.2}$$

其中所有系数a_{ij}都是常数，若用向量记法，(5.2)式可写成

$$\frac{dx}{dt}=A\boldsymbol{X} \tag{5.2'}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

根据高阶方程与一阶方程组的等价性，我们试求(5.2)形如

$$x_i=r_ie^{\lambda t}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.3}$$

的指数形式解，或写成

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}e^{\lambda t} \tag{5.3'}$$

其中λ和n维向量$\boldsymbol{R}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^T$都是待定的。把（5.3）代入(5.2)并消去$e^{\lambda t}$，得到

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)r_1+a_{12}r_2+\cdots+a_{n}r_n=0,\\ a_{21}r_1+(a_{22}-\lambda)r_2+\cdots+a_{2n}r_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}r_1+a_{n2}r_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)r_n=0,\end{cases} \tag{5.4}$$

把(5.4)看作是以$r_1, r_2, \cdots, r_n$为未知数的线性齐次代数方程组，它有非平凡解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.5)$$

(5.5)式是λ的n次方程，我们称它为方程组(5.2)的特征方程（也称作矩阵A的特征方程），而称它的根为特征根。显然方程(5.5)的左端是关于λ的n次多项式，习惯上我们也称这个多项式为方程组(5.2)的特征多项式，并用$p(\lambda)$表示，这时方程(5.5)就可记为

$$P(\lambda) = 0.$$

对应于每一个特征根λ，由代数方程组(5.4)确定的一组值$r_1, r_2, \cdots, r_n$，若记$\boldsymbol{R} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$，于是$\boldsymbol{R}$就是与此$\lambda$相应的特征向量。很明显对同一个特征根$\lambda$，特征向量$\boldsymbol{R}$可相差一个常数因子。

关于(5.4)和(5.5)的向量表示式，可写为

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{R} = 0 \qquad (5.4)'$$

和

$$|A - \lambda E| = 0, \qquad (5.5)'$$

其中

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

是单位矩阵。只要能求得特征根λ和相应的特征向量$\boldsymbol{R}$，我们就得到了形如(5.3)′的解。

因此，要求方程组(5.2)的解，就必须对特征方程(5.5)的根

进行研究；这 n 个根可能是实单根，复根和重根，下面将分情况进行讨论，并给出解的各种具体求法，

1.特征根都是不同的实根。 设这些根是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，把它们依次代入方程组(5.4)，就得到相应的特征向量$\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_n$，这里

$$\boldsymbol{R}_j=(r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{nj})^T,\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

把λ_j和$\boldsymbol{R}_j$代入(5.3)，我们就求得线性齐次微分方程组(5.2)的n个解：

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{R}_1e^{\lambda_1 t},\quad \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{R}_2e^{\lambda_2 t},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{R}_ne^{\lambda_n t},\tag{5.6}$$

显然这n个解是线性无关的。如果它们是线性相关的，那就必存在一组不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$使得恒等式$\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{X}_j\equiv 0$ 成立，即

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{R}_je^{\lambda_j t}\equiv 0,$$

或者写成如下的n个恒等式：

$$\begin{cases} c_1r_{11}e^{\lambda_1 t}+c_2r_{12}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_nr_{1n}e^{\lambda_n t}\equiv 0,\\ c_1r_{21}e^{\lambda_1 t}+c_2r_{22}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_nr_{2n}e^{\lambda_n t}\equiv 0,\\ \cdots\cdots\\ c_1r_{n1}e^{\lambda_1 t}+c_2r_{n2}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_nr_{nn}e^{\lambda_n t}\equiv 0. \end{cases}$$

由于函数组$e^{\lambda_j t}(j=1,2,\cdots,n)$是线性无关的，因此有

$$c_1\begin{pmatrix}r_{11}\\ r_{21}\\ \vdots\\ r_{n1}\end{pmatrix}=0,\quad c_2\begin{pmatrix}r_{12}\\ r_{22}\\ \vdots\\ r_{n2}\end{pmatrix}=0,\quad \cdots,\quad c_n\begin{pmatrix}r_{1n}\\ r_{2n}\\ \vdots\\ r_{nn}\end{pmatrix}=0.\tag{5.7}$$

如果$c_1,c_2,\cdots,c_n$中有一个不等于零，不妨设$c_1\neq0$,那么从(5.7)就得出$r_{11}=r_{21}=\cdots=r_{n1}=0$，但这与$\boldsymbol{R}_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 都是非零向量的结论是矛盾的。所以$c_j=0(j=1,2,\cdots,n)$，这就说明解$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$是线性无关的。从而$\boldsymbol{X}_j(j=1,2,\cdots,n)$就构成了方程组(5.2)的基本解组。根据定理6.7，方程组(5.2) 的通解形状为

$$\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{R}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{R}_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\boldsymbol{R}_ne^{\lambda_n t},$$

或者写成

$$\begin{cases} x_1=c_1r_{11}e^{\lambda_1 t}+c_2r_{12}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_nr_{1n}e^{\lambda_n t}, \\ x_2=c_1r_{21}e^{\lambda_1 t}+c_2r_{22}e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_nr_{2n}e^{\lambda_n t}, \\ \cdots\cdots \\ x_n=c_1r_{n1}e^{\lambda_1 t}+c_2r_{n2}e^{\lambda_2 t}+\cdots+C_nr_{nn}e^{\lambda_n t}. \end{cases}$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$都是任意常数。

我们知道对于每一个特征根λ_j，与其相应的特征向量 $\boldsymbol{R}_j$都是由代数方程组(5.4) 非单值地确定。这同给线性齐次方程组的解乘上一个任意常数因子后它还是这个方程组的解的性质是一致的。

例1 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+y \end{cases}$$

的通解。

解 由于特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=0$$

的根是$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$。求出对应$\lambda_1=3$的特征向量$\boldsymbol{R}_1$，由方程

组

$$\begin{cases}-2r_1+r_2=0\\4r_1-2r_2=0,\end{cases}$$

得$r_2=2r_1$，故$\boldsymbol{R}_1=(1,2)^T$。

同理，对于$\lambda_2=-1$可求出对应的特征向量$\boldsymbol{R}_2=(1,-2)^T$。

故求得方程组的基本解组为

$$\begin{cases}x_1=e^{3t},\\y_1=2e^{3t},\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=e^{-t},\\y_2=-2e^{-t}.\end{cases}$$

所以通解为

$$\begin{cases}x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t},\\y=2c_1e^{3t}-2c_2e^{-t}.\end{cases}$$

2.特征根是复根的情形. 对于特征根是复数时，上面的结论仍然成立。设$\lambda_k=\alpha+i\beta$是特征方程(5.6)的一个复根，其对应的特征向量为$\boldsymbol{R}_k$，如果方程组(5.2)的所有系数a_{ij}都是实数，那么特征方程(5.5)还有共轭复根$\overline{\lambda_k}=\alpha-i\beta$，则它对应的特征向量$\overline{\boldsymbol{R}}_k$也与$\boldsymbol{R}_k$共轭。因此，由特征根$\lambda_k$和$\overline{\lambda_k}$所得到的两个特解一般是复值函数：

$$\boldsymbol{R}_ke^{(\alpha+i\beta)t},\qquad\overline{\boldsymbol{R}}_ke^{(\alpha-i\beta)t}.$$

但是，人们感兴趣的一般还是求实值解。根据上一节的性质3°，我们可用两个实解来代替它们，即为

$$\boldsymbol{X}_k=\mathrm{Re}(\boldsymbol{R}_ke^{(\alpha+i\beta)t}),\quad\boldsymbol{X}_{k+1}=\mathrm{Im}(\boldsymbol{R}_ke^{(\alpha+i\beta)t}).$$

设$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{U}+i\boldsymbol{V}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_ke^{(\alpha+i\beta)t}&=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(\boldsymbol{U}+i\boldsymbol{V})\\&=e^{\alpha t}(\boldsymbol{U}\cos\beta t-\boldsymbol{V}\sin\beta t)+ie^{\alpha t}(\boldsymbol{U}\sin\beta t+\boldsymbol{V}\cos\beta t)\end{aligned}$$

故得到

$$\mathbf{X}_k = e^{\alpha t}(\mathbf{U}\cos\beta t - \mathbf{V}\sin\beta t),$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = e^{\alpha t}(\mathbf{U}\sin\beta t + \mathbf{V}\cos\beta t).$$

而共轭复根$\bar{\lambda}_k = \alpha - i\beta$并不给出新的线性无关实解。

例2 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

的通解。

解 特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0$$

的根是$\lambda_1 = 3i$，$\lambda_2 = -3i$。

关于特征根$\lambda_1 = 3i$，对应的特征向量$\mathbf{R}_1$由方程组

$$\begin{cases} (1-3i)r_1 - 5r_2 = 0 \\ 2r_1 - (1+3i)r_2 = 0, \end{cases}$$

确定，取$r_1 = 5$，$r_2 = 1-3i$，于是$\mathbf{R}_1 = (5, 1-3i)^T$，从而复值形式的特解可写为

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}(\cos 3t + i\sin 3t)$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cos 3t + i5\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t + i(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

取其实部和虚部，就得到

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\sin3t\\ \sin3t-3\cos3t\end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2,$$

其中c_1，c_2是两个任意常数。

3. 特征根是重根的情形. 设$\lambda=\lambda_1$是特征方程(5.5)的k重根，这时与λ_1相应的应该有k个线性无关解，但由公式(5.6)可能只求得方程组(5.2)的一个特解，要求出其余的$k-1$个特解就得另想办法。这里我们利用线性代数的有关知识，将方程组(5.2)化成可以直接积分的方程组，从而求出方程组(5.2)的通解。

根据矩阵理论，对于$n\times n$的常数矩阵A，必存在非异的$n\times n$矩阵T，使得矩阵$T^{-1}AT$为若当(Jordan)标准型J，即

$$T^{-1}AT=J=\begin{pmatrix}J_1&0&\cdots&0\\0&J_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&J_m\end{pmatrix},$$

其中J_i是一个若当小块，它具有以下形式之一

$$(\lambda_i),\quad\begin{pmatrix}\lambda_i,&1\\0,&\lambda_i\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\lambda_i&1&0\\0&\lambda_i&1\\0&0&\lambda_i\end{pmatrix},\quad\cdots,$$

这里λ_i是矩阵A的特征根。一个若当小块对应一个特征根，但一个特征根对应的若当小块却不一定是单一的，这时一个特征根所对应的各小块的阶数的总和应等于此根的重数。如果若当小块J_i的阶数是$k_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是有$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。

现在再回到方程组(5.2)，由于对系数矩阵A存在着把它变换成若当标准型的矩阵T，我们就利用矩阵T作变换，

$$X = TY \tag{5.8}$$

即

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

引入新的未知函数$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，这样方程组(5.2)通过线性变换(5.8)就化为

$$T\frac{dY}{dt} = ATY.$$

即

$$\frac{dY}{dt} = T^{-1}ATY. \tag{5.9}$$

由于矩阵$T^{-1}AT = J$是若当标准型，所以方程组(5.9)的解是容易求出的，为此写(5.9)为分量形式

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \qquad \lambda_1 y_2 + y_3 \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dy_{k_1}}{dt} &= \qquad\qquad \lambda_1 y_{k_1} \end{aligned}\right\} (5.9)' \\ \cdots\cdots \\ \left.\begin{aligned} \frac{dy_{n-k_m+1}}{dt} &= \lambda_m y_{n-k_m+1} + y_{n-k_m+2}, \\ \frac{dy_{n-k_m+2}}{dt} &= \qquad \lambda_m y_{n-k_m+2} + y_{n-k_m+3} \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \qquad\qquad \lambda_m y_n \end{aligned}\right\} (5.9)^{(m)} \end{cases}$$

整个方程组分成独立的m组，它的组数以及每个方程组中方程的个数，与我们在代数学中讲到的矩阵A的初等因子个数以及每个初等因子的次数有关。这样一来，我们可分别对每一组单独进行

积分。下面仅对(5.9)′作详细讨论，从它的最后一个方程开始积分，得

$$y_{k_1}=c_{k_1}e^{\lambda_1 t},\qquad (c_{k_1}\text{是任意常数})$$

代入(5.9_1)的倒数第二个方程，则有

$$\frac{dy_{k_1-1}}{dt}=\lambda_1 y_{k_1-1}+c_{k_1}e^{\lambda_1 t},$$

这是一阶线性方程，解之得

$$y_{k_1-1}=e^{\lambda_1 t}(c_{k_1-1}+c_{k_1}t),\qquad (c_{k_1-1}\text{是任意常数});$$

如此作下去，就可求得

$$y_{k_1-2}=e^{\lambda_1 t}\left(c_{k_1-2}+c_{k_1-1}t+\frac{c_{k_1}}{2!}t^2\right)\quad (c_{k_1-2}\text{是任意常数});$$

……

$$y_1=e^{\lambda_1 t}\left(c_1+c_2t+\cdots+\frac{c_{k_1}}{(k_1-1)!}t^{k_1-1}\right),(c_1\text{是任意常数}).$$

可仿照以上的作法，求出其它各组的解，然后将它们并起来，就是方程组(5.9)的解：

$$\begin{cases}
y_1=\left(c_1+c_2t+\cdots+\dfrac{c_{k_1}}{(k_1-1)!}t^{k_1-1}\right)e^{\lambda_1 t},\\
y_2=\left(c_2+c_3t+\cdots+\dfrac{c_{k_1}}{(k_1-2)!}t^{k_1-2}\right)e^{\lambda_1 t},\\
\cdots\cdots\\
y_{k_1}=\qquad\qquad\qquad c_{k_1}e^{\lambda_1 t},\\
\cdots\cdots\\
y_{n-k_m+1}=\left(c_{n-k_m+1}+c_{n-k_m+2}t+\cdots+\dfrac{c_n}{(k_m-1)!}t^{k_m-1}\right)e^{\lambda_m t},\\
y_{n-k_m+2}=\left(c_{n-k_m+2}+c_{n-k_m+3}t+\cdots+\dfrac{c_n}{(k_m-2)!}t^{k_m-2}\right)e^{\lambda_m t},\\
\cdots\cdots\\
y_n=\qquad\qquad\qquad c_ne^{\lambda_m t}.
\end{cases}\tag{5.10}$$

其中c_1、c_2，…，c_n是任意常数。把（5.10）写成向量形式就是

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k_1} \\ \vdots \\ y_{n-k_m+1} \\ y_{n-k_m+2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+c_{k_1}\begin{pmatrix} \dfrac{t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}}{(k_1-1)!} \\ \dfrac{t^{k_1-2}e^{\lambda_1 t}}{(k_1-2)!} \\ \vdots \\ e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+\cdots+c_{n-k_m+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+c_{n-k_m+2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ te^{\lambda_m t} \\ e^{\lambda_m t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}}{(k_m-1)!} \\ \dfrac{t^{k_m-2}e^{\lambda_m t}}{(k_m-2)!} \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}$$

$$=c_1\boldsymbol{Y}_1+c_2\boldsymbol{Y}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{Y}_k+\cdots+c_{n-k_m+1}\boldsymbol{Y}_{m-k_m+1}+$$
$$+c_{n-k_m+2}\boldsymbol{Y}_{n-k_m+2}+\cdots+c_n\boldsymbol{Y}_n. \qquad (5.11)$$

容易看出，我们得到了n个特解：

$$\boldsymbol{Y}_1=(e^{\lambda_1 t},0,\cdots,0,\cdots,0,0,\cdots,0)^T,$$

$$\boldsymbol{Y}_2=(te^{\lambda_1 t},e^{\lambda_1 t},\cdots,0,\cdots,0,0,\cdots,0)^T,$$

……

$$\mathbf{Y}_{k_1}=\left(\frac{t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}}{(k_1-1)!},\ \frac{t^{k_1-2}e^{\lambda_1 t}}{(k_1-2)!},\cdots,\ e^{\lambda_1 t},0,0,\cdots,0\right)^T,$$

……

$$\mathbf{Y}_{n-k_m+1}=(0,0,\cdots,0,\cdots,0,e^{\lambda_m t},0,\cdots,0)^T,$$

$$\mathbf{Y}_{n-k_m+2}=(0,0,\cdots,0,\cdots,0,te^{\lambda_m t},e^{\lambda_m t},0,\cdots,0)^T,$$

……

$$\mathbf{Y}_n=\left(0,0,\cdots,0,\frac{t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}}{(k_m-1)!},\ \frac{t^{k_m-2}e^{\lambda_m t}}{(k_m-2)!},\cdots,e^{\lambda_m t}\right)^T.$$

由于它们的朗斯基行列式$W[t]\neq 0$，故$\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\cdots,\mathbf{Y}_n$构成方程组(5.9)的基本解组。从而(5.11)就是方程组(5.9)的通解表达式。

为了得到(5.2)的基本解组，我们设非异矩阵T为

$$T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix},$$

于是由变换$\mathbf{X}=T\mathbf{Y}$得到

$$\mathbf{X}_1=T\mathbf{Y}_1=\begin{bmatrix} T_{11}e^{\lambda_1 t} \\ T_{21}e^{\lambda_1 t} \\ \cdots\cdots \\ T_{n1}e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}=e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ \cdots \\ T_{n1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2=T\mathbf{Y}_2=e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} T_{11}t+T_{12} \\ T_{21}t+T_{22} \\ \cdots\cdots \\ T_{n1}t+T_{n2} \end{bmatrix},$$

……

$$\mathbf{X}_n=T\mathbf{Y}_n$$

$$
=e^{\lambda_m t}\begin{bmatrix}
T_{1n-k_m+1}\dfrac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!}+T_{1n-k_m+2}\dfrac{t^{k_m-2}}{(k_m-2)!}+\cdots+T_{1n}\\
T_{2n-k_m+1}\dfrac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!}+T_{2n-k_m+2}\dfrac{t^{k_m-2}}{(k_m-2)!}+\cdots+T_{2n}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_{nn-k_m+1}\dfrac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!}+T_{nn-k_m+2}\dfrac{t^{k_m-2}}{(k_m-2)!}+\cdots+T_{nn}
\end{bmatrix}
$$

显然，这样求得的$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$都是方程组(5.2)的解。现在证明这些解是线性无关的。由变换(5.8)知，方程组(5.2)的解与方程组(5.9)的解满足矩阵关系式

$$(x_{ij})=(T_{ij})(y_{ij}),$$

因此，它们的行列式满足关系式

$$\det(x_{ij})=\det(T_{ij})\det(y_{ij})。\tag{5.12}$$

从等式(5.12)可以看出解组$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$的朗斯基行列式

$$W(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\neq 0。$$

故$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$是(5.2)的一个基本解组。从而方程组(5.2)的通解可写成

$$\boldsymbol{X}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{X}_i$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$都是任意常数。

以上论断，对非重特征根的情形，依然适用，所不同的只是变换后的方程组更容易积分罢了。这里我们要注意，变换矩阵T理论上虽然是存在的，但在实践上要找出矩阵T却是麻繁的事情。因此，它只能作为后面学习待定系数法的理论基础。

例3 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

的通解。

解 它的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

由特征方程

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

可求出两个特征根，一个是单根$\lambda_1 = 2$，另一个是二重根$\lambda_2 = 1$，它所对应的初等因子的次数是2，于是存在非异矩阵T，使

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用矩阵T作线性变换

$$\mathbf{X} = T\mathbf{Y},$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

把微分方程变为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

即

$$\frac{dy_1}{dt}=2y_1,\quad \frac{dy_2}{dt}=y_2+y_3,\quad \frac{dy_3}{dt}=y_3.$$

积分得

$$\begin{cases}y_1=c_1e^{2t},\\y_2=(c_2+c_3t)e^t,\\y_3=c_3e^t.\end{cases}$$

为了得到原方程组的通解，必须求出T来，设

$$T=(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3),\quad T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&1\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{V}_3$为由矩阵T的列构成的向量，那么

$$A(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3)=(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&1\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix},$$

由乘法规则，我们有

$$(A\boldsymbol{V}_1,A\boldsymbol{V}_2,A\boldsymbol{V}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{V}_1,\lambda_2\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_2+\lambda_2\boldsymbol{V}_3),$$

于是

$$A\boldsymbol{V}_1=\lambda\boldsymbol{V}_1,A\boldsymbol{V}_2=\lambda_2\boldsymbol{V}_2,A\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{V}_2+\lambda_2\boldsymbol{V}_3.$$

即

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{V}_1=0,\quad (A-\lambda_2E)\boldsymbol{V}_2=0,\quad (A-\lambda_2E)\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{V}_2.$$

因此$\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$分别是矩阵A对应于λ_1，λ_2的特征向量，$\boldsymbol{V}_3$是线性代数方程组的向量解。

这里对$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$我们得到

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

所以求得

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

于是所求原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\e^{2t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^t\\2e^t\\-e^t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}te^t\\2te^t+e^t\\-te^t-e^t\end{pmatrix},$$

其中c_1,c_2,c_3是任意常数。

4.待定系数法. 关于方程组（5.2)的求解问题，虽然已经解决，但是，由于找出矩阵A的初等因子和确定变换矩阵T是一种非常复杂而困难的工作，所以要直接运用上面的方法来求方程组(5.2）的通解是很不方便的。为此，我们对所得结果进行观察，不难发现与k重特征根λ对应的解，它的形状为

$$x_i=P_i(t)e^{\lambda t},\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中$P_i(t)=r_{i1}+r_{i2}t+\cdots+r_{ik}t^{k-1}$是次数不高于$k-1$次的多项式。基于这种分析，我们现用所谓待定系数法来求（5.2)的基本解组。当系数矩阵是实的，先求出互异的特征根λ_j和它们的重次k_j ($j=1,2,\cdots,m$; $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$)。然后对于λ_j分别写出形如

$$\begin{cases}x_1=(c_{11}+c_{12}t+\cdots+c_{1k_j}t^{k_j-1})e^{\lambda_j t},\\x_2=(c_{21}+c_{22}t+\cdots+c_{2k_j}t^{k_j-1})e^{\lambda_j t},\\\cdots\cdots\\x_n=(c_{n1}+c_{n2}t+\cdots+c_{nk_j}t^{k_j-1})e^{\lambda_j t}\end{cases}\qquad(5.13)$$

的解，其中系数c_{ih}是待定的，把(5.13)代入方程组(5.2)，约去公因子，并比较t的同次幂的系数，就得到关于待定系数的线性代数方程组。解此方程组，可取任意值的未知数的个数等于λ_j的重次k_j，于是就求得(5.2)的k_j个线性无关解组。最后将$j=1,2,\cdots,m$各解组合起来，就构成方程组(5.2)的基本解组。

对于特征根λ是复重根的情况，方法也是类似的，这时必有一个重数相同的共轭特征根$\bar{\lambda}$，对应的解组中的解也是互为共轭的。因此，我们可选用一个组中解的实部和虚部来代替它们。

例4 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2+x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2-x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_2+x_3\end{cases}$$

的通解。

解 由于特征方程是

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0,$$

可求出特征根为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$（二重根）。因此，方程组对应单根$\lambda_1=0$的解应具有的形状为

$$x_1=c_{11},\quad x_2=c_{21},\quad x_3=c_{31}.$$

这里c_{i1} $(i=1,2,3)$是待定系数。把它们代入微分方程组，得

$$\begin{cases}c_{21}+c_{31}=0,\\ c_{11}+c_{21}-c_{31}=0,\\ c_{21}+c_{31}=0.\end{cases}$$

这个代数方程组只有两个方程是独立的。令$c_{31}=\alpha$（α是任意的），我们就得到微分方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=2\alpha, \\ x_2=-\alpha, \\ x_3=\alpha. \end{cases}$$

对于二重根$\lambda_2=\lambda_3=1$，应该求具有形状

$$\begin{cases} x_1=(c_{11}+c_{12}t)e^t, \\ x_2=(c_{21}+c_{22}t)e^t, \\ x_3=(c_{31}+c_{32}t)e^t. \end{cases}$$

的解，其中c_{ij}（$i=1,2,3$，$j=1,2$）是待定常数。代入微分方程组，并消去因子e^t，得到

$$c_{12}t+c_{11}+c_{12}=(c_{22}+c_{32})t+c_{21}+c_{31},$$

$$c_{22}t+c_{21}+c_{22}=(c_{12}+c_{22}-c_{32})t+c_{11}+c_{21}-c_{31},$$

$$c_{32}t+c_{31}+c_{32}=(c_{22}+c_{32})t+c_{21}+c_{31},$$

比较t的同次幂系数，就得到代数方程组：

$$\begin{cases} c_{12}-c_{22}-c_{32}=0, \\ c_{12}-c_{32}=0, \\ c_{22}=0, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &c_{11}+c_{12}-c_{21}-c_{31}=0, \\ &c_{22}-c_{11}+c_{31}=0, \\ &c_{32}-c_{21}=0, \end{aligned}$$

解得

$$c_{11}=c_{31}, \quad c_{21}=c_{12}, \quad c_{12}=c_{32}, \quad c_{22}=0,$$

我们令$c_{31}=\beta$，$c_{32}=\gamma$，这里β和γ是任意的，于是得到

$$c_{11}=\beta, \ c_{21}=\gamma, \ c_{31}=\beta;$$

$$c_{12}=\gamma, \ c_{22}=0, \ c_{32}=\gamma.$$

所以微分方程组相应于二重特征根 1 的解就是

$$\begin{cases} x_1=(\beta+\gamma t)e^t, \\ x_2=\gamma e^t, \\ x_3=(\beta+\gamma t)e^t. \end{cases}$$

从而方程组的通解可写为

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + (\beta + \gamma t)e^t, \\ x_2 = -\alpha + \gamma e^t \\ x_3 = \alpha + (\beta + \gamma t)e^t \end{cases}.$$

或者写成向量形式

$$\mathbf{X} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ te^t \end{pmatrix}.$$

其中α、β、γ都是任意常数。

例5 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y - e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y + 4e^{-t} \end{cases}$$

的通解。

解 先求它对应的齐次方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$$

的通解。为此，由特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5) = 0$$

求出根 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 5$. 因为特征根都是单根，所以，相应$\lambda = -1$，我们应当求形状如

$$\begin{cases} x_1 = r_1 e^{-t}, \\ y_1 = r_2 e^{-t} \end{cases}$$

的解，这里r_1，r_2是待定常数。将它代入齐次微分方程组，并消去因子e^{-t}，得到以r_1，r_2为未知数的代数方程组

$$\begin{cases}-r_1=r_1+2r_2,\\ -r_2=4r_1+3r_2\end{cases}$$

令$r_1=c_1$，则有$r_2=-c_1$。因此相应于$\lambda_1=-1$的解可写为

$$\begin{cases}x_1=c_1e^{-t},\\ y_1=-c_1e^{-t},\end{cases}$$

其中c_1是任意常数。

同理可得相应于$\lambda_2=5$的解为

$$\begin{cases}x_2=c_2e^{5t},\\ y_2=2c_2e^{5t},\end{cases}$$

其中c_2是任意常数。于是对应的齐次微分方程组的通解可写为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{5t}\\ 2e^{5t}\end{pmatrix}.$$

现在利用常数变易法求原方程组的通解，把上面通解中的任意常数c_i写成$c_i(t)(i=1,\ 2)$，即

$$\begin{cases}x=c_1(t)e^{-t}+c_2(t)e^{5t},\\ y=-c_1(t)e^{-t}+2c_2(t)e^{5t}.\end{cases}$$

然后代入原微分方程组，得

$$\begin{cases}c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)e^{5t}=-e^{-t},\\ -c_1'(t)e^{-t}+2c_2'(t)e^{5t}=4e^{-t}.\end{cases}$$

于是有

$$c_1'(t)=-2,\quad c_2'(t)=e^{-6t},$$

$$c_1(t)=-2t+\bar{c}_1,\quad c_2(t)=-\frac{1}{6}e^{-6t}+\bar{c}_2.$$

所以原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = \bar{c}_1 e^{-t} + \bar{c}_2 e^{5t} - \left(2t + \dfrac{1}{6}\right) e^{-t}, \\ y = -\bar{c}_1 e^{-t} + 2\bar{c}_2 e^{5t} + \left(2t - \dfrac{1}{3}\right) e^{-t}, \end{cases}$$

其中$\bar{c}_1$，$\bar{c}_2$是任意常数。

例6 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

的通解。

解 其特征方程是

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0,$$

从而得特征根为$\lambda_1 = 3i$，$\lambda_2 = -3i$。因此，对应于$\lambda_1 = 3i$方程组的解应具有形状

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} e^{i3t},$$

这里r_1，r_2是待定常数。代入微分方程组，得

$$\begin{cases} (1-3i)r_1 - 5r_2 = 0, \\ 2r_2 + (-1-3i)r_2 = 0. \end{cases}$$

于是推出

$$r_1 : r_2 = 5 : (1-3i)$$

令$r_1 = 5$，则$r_2 = 1 - 3i$。我们就得到方程组的一个复值解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{i3t}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

今取其实部和虚部就得到基本解组

$$\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

故得到通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix},$$

其中c_1，c_2是任意常数。

例7　今发射一炮弹，假设炮弹在空中运行时所受的阻力与它的速度成正比，试求炮弹的（弹道方程）运行规律。

解　设炮弹在空中的运行位于同一平面上，取此平面为XOY坐标面，并取发射点为原点，发射角为φ。

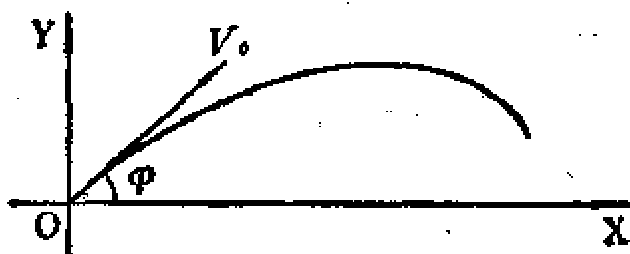


图6—1

在所取的坐标系中，炮弹运行的速度和加速度沿着两个坐标轴方向分别为$\frac{dx}{dt}$，$\frac{d^2x}{dt^2}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$。记炮弹的质量为m，比例常数为K，于是根据牛顿第二定律即得弹道应满足的微分方程组为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -K\dfrac{dx}{dt}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -K\dfrac{dy}{dt} - mg. \end{cases}$$

如果初速度为V_0，那么初始条件可写为

$$\begin{cases} x|_{t=0}=0, & \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=V_0\cos\varphi, \\ y|_{t=0}=0 & \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=V_0\sin\varphi. \end{cases}$$

由于这个方程是线性的，而且第一个方程正好与第二个方程对应的齐次方程相同，显然$\overline{y}=-\frac{mg}{K}t$是第二个方程的一个特解，所以方程组的通解是

$$\begin{cases} x=c_1+c_2e^{-\frac{K}{m}t}, \\ y=c_3+c_4e^{-\frac{K}{m}t}-\dfrac{mg}{K}t. \end{cases}$$

再利用初始条件，即可定出

$$c_1=\frac{mV_0}{K}\cos\varphi,$$

$$c_2=-\frac{mV_0}{K}\cos\varphi,$$

$$c_3=\frac{m}{K}\left(V_0\sin\varphi+\frac{m\varphi}{K}\right),$$

$$c_4=-\frac{m}{K}\left(V_0\sin\varphi+\frac{mg}{K}\right).$$

所以炮弹的运行规律是

$$\begin{cases} x=\dfrac{mV_0}{K}\left[1-e^{-\frac{K}{m}t}\right]\cos\varphi, \\ y=\dfrac{m}{K}\left(V_0\sin\varphi+\dfrac{mg}{K}\right)\left[1-e^{-\frac{K}{m}t}\right]-\dfrac{mg}{K}t. \end{cases}$$

习　题

将下面的始值问题化为与之等价的一阶方程组的始值问题。

1. $x'' + 2x' + 7tx = e^{-t}$, $x(1) = 7$, $x'(1) = -2$;

2. $x^{(4)} + x = te^t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$, $x'''(0) = 0$;

3. $$\begin{cases} x'' + 5y' - 7x + 6y = e^t, \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t, \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. 把下列方程组化成高阶方程，然后求出它的通解。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

5. 试把始值问题

$$\begin{cases} x' = x + y + e^t, \\ y' = x - y; \\ x(0) = 0, \ y(0) = 0, \end{cases}$$

化成只含一个未知函数的二阶微分方程的始值问题。

6. 求解始值问题

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t), \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. 试用逐次逼近法求方程组 $\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t)$ 满足初始条件 $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的第三次近似解。

8. 求解始值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

的第三次近似解.

9. 设$x(t)$ 是$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$上的连续函数，且当$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$时，

$$|x(t)| \leqslant M + K \int_{t_0}^{t} |x(\tau)| d\tau,$$

其中M，K都是非负常数。试用逐步逼近法证明当$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$时，

$$|x(t)|\leqslant Me^{K(t-t_0)}。$$

求下列方程组的通解：

10. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2}{x}.\end{cases}$

11. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}$.

12. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z.\end{cases}$

13. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{z+x}=\dfrac{dz}{x+y}$.

14. $\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{xt}=\dfrac{dt}{x+y}$.

15. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{-y(z^2-x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

16. $\dfrac{dx}{2z-3y}=\dfrac{dy}{3x-4z}=\dfrac{dz}{4y-2x}$.

17. $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{-dz}{x^2+y^2}$.

18. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z^2}{y},\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y^2}{x}.\end{cases}$

19. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{z},\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z^2}{y}.\end{cases}$

20. 设$\Phi(t)=\begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$，证明 $\Phi(t)$ 是线性齐次方程组 $\mathbf{X}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}\mathbf{X}(t)$在任何不包含原点的区间$a\leqslant t\leqslant b$上的基解矩阵。

21. 若线性齐次方程组$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=A_1(t)\mathbf{X}$与$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=A_2(t)\mathbf{X}$有相同的基本解组，试证矩阵函数$A_1(t)=A_2(t)$。

22. 设$W_1[t]$和$W_2[t]$是线性齐次方程组$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=A(t)\mathbf{X}$的两个基本解组的朗斯基行列式，试证$W_1[t]=cW_2[t]$，其中$c$是一个不为零的任意常数。

23. 已知线性无关函数组$\Phi_1(t)=\begin{pmatrix} 1+t \\ 2 \end{pmatrix}$，$\Phi_2(t)=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$试作一个以它为基本解组的线性齐次方程组。

24. 已知$\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$为方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2 \\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2, \end{cases}$$

的基本解组，试求$a_{ij}(t)$，$(i,\ j=1,\ 2)$。

25. 考虑方程组$\mathbf{X}'=A\mathbf{X}+\mathbf{F}$，其中$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$。

1) 试验证 $\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$是$\mathbf{X}'=A\mathbf{X}$的基本解组构成的矩阵。

2) 试求$\mathbf{X}'=A\mathbf{X}+F$满足初始条件$\mathbf{X}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$的解$\mathbf{X}(t)$。

26. 试求 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$满足初始条件 $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的解$\mathbf{X}(t)$。

27. 设$a_{ij}(t)(i,j=1,2,3)$在$-\infty<t<\infty$上连续，已知方程组：

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 + t$$

的对应方程组的一基本解组为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}e^t$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t$ 试求出所给方程组的通解及满足初始条件$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$的特解。

求解下列方程组：

28. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 48y - 28z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 40y - 22z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -6x + 57y - 31z. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + z - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = z + x - y. \end{cases}$$

31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x-y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}-8x+y=0; \\ x(0)=1,\ \ y(0)=4. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-x=0, \\ \dfrac{dx}{dt}+y=0; \\ x(0)=1,\ \ y(0)=0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} -\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}-x+2z=e^{-t}, \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+x=2e^{-t}, \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x+2y=3e^{-t}. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-x+4y=0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+x-y=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y+\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y+1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+1, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{1}{\sin t}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=\sin t-3x, \\ \dfrac{dx}{dt}=\cos t-y. \end{cases}$

38. $\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}-y+x=1, \\ t\dfrac{dy}{dt}-y-3x=-3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}-x-3y=t, \\ t\dfrac{dy}{dt}-x+y=0. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt}+9\dfrac{dy}{dt}+44x+49y=t, \\ 3\dfrac{dx}{dt}+7\dfrac{dy}{dt}+34x+38y=e^t. \end{cases}$

41. $\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}+y=0, \\ t\dfrac{dy}{dt}+x=0. \end{cases}$

42. 对于常系数线性齐次微分方程组$\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}=A\mathbf{X}$，试证明它的所有特征根具有负实部，是其一切解当$t\to+\infty$时都趋于零的充要条件。

第七章　定性理论初步

§1　引　言

在这一章里，我们所要讨论的内容是常微分方程的一个重要分支。它包括一般定性理论和稳定性理论两大部分，其主要任务是研究比较复杂的微分方程解的局部和全局的性质。

18世纪后半叶，微分方程的研究中心是求通解表达式。当时人们几乎相信，凡微分方程都可求出用初等函数所表达的解来；但实际上，求这种形式的解已越来越困难。尽管哥西于19世纪初期首先对微分方程的始值问题解的存在性提供了严格的证明，增强了人们求解的信心，然而解的存在与写出解的表达式必竟是两回事，特别是刘维尔在1841年从理论上证明了一般黎卡提方程不可能用初等积分法求解，这一结果对微分方程的发展影响很大，使人们意识到一个微分方程（特别是非线性方程）的解能否求出，并不是方法问题，而是有本质上的困难。

到19世纪八十年代，人们开始从定性方面去探求解的一般性态，即直接由微分方程本身来研究它所定义的积分曲线。这种观点在线性方程(组)中已经使用过，至于非线性方程的定性研究就别开生面了。法国数学家庞卡莱（H.Poincaré）和俄国数学家李雅普诺夫（ляпунов）两人互相独立而又互有影响地发展了定性理论这一分支，并且为常微方程定性理论奠定了牢固的基础。

对于微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots n)\tag{1.1}$$

在大多数的实际问题中并不需要求出它的解，而关心的只是以下几个问题：

1.是否存在一组常数$x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$，使得$x_i=x_i^0$（$i=1,2,\cdots n$）是（1.1）的解，在力学上，一般地称（$x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$）是方程组（1.1）的平衡点；

2.设$\varphi_i(t)$和$\psi_i(t)(i=1,2,\cdots n)$是（1.1）的两个解，且对$1\leqslant i\leqslant n$，$\psi_i(0)$接近$\varphi_i(0)$，试问$\psi_i(t)$对以后的一切$t$是都在$\varphi_i(t)$的附近，还是当$t$趋于无穷大时$\psi_i(t)$将远离$\varphi_i(t)$（$i=1,2,\cdots n$）；

3.当t趋于无穷大时，方程组（1.1）的解的性状如何？

为简单起见，我们常把方程组（1.1）写成向量形式

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{F}(t,\mathbf{X}),$$

其中$\mathbf{X}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \cdots\frac{dx_n}{dt}\right)^T$，$\mathbf{F}(t,\mathbf{X})=(f_1,f_2,\cdots f_n)^T$。

关于方程（1.1）的研究，根据方程本身的不同，可分为两种情形。一种是方程的右端不明显包含自变量t的情形，这时方程组的形式是

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n)\tag{1.2}$$

我们称它为自治方程组。另一种情形就是（1.1），即方程的右端含有自变量t的情形，我们称它为非自治方程组。

本章的目的，主要是对自治方程组就上述问题作一初步介绍。

§2 自治系统及其基本性质

讨论下列形式的方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\cdots x_n)\quad(i=1,2,\cdots n)\tag{2.1}$$

其区域为

$$G=\{(t,x_1\cdots x_n);\ -\infty<t<+\infty,\ (x_1\cdots x_n)\in D\},$$

式中D是n维空间 $(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 中的某区域。(2.1) 的向量形式为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

很多物理规律都可用自治方程组来描述。如在第三章§4中讨论的弹簧振动问题，描述它的方程是

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+\mu^2y=0.$$

若令$z=\frac{dy}{dt}$，上式便化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=z,\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=-2bz-\mu^2y,\end{cases}$$

显然，它是自治方程组 (2.1) 的形式。顺便指出，这里坐标(y,z) 的涵意是：y是位移，z是速度。通常我们称 (y,z) 平面为相平面。

本章我们恒假定方程组 (2.1) 的右端函数 $f_i(x_1,\cdots x_n)$ $(i=1,2,\cdots n)$ 在n维空间 $(x_1,\cdots x_n)$ 中的区域D内有定义且连续，并

设f_i $(x_1,\cdots,x_n)$ 满足适当条件，使得对任意$-\infty<t_0<+\infty$，$(x_1^0,\cdots x_n^0)\in D$，足以保证始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots x_n), & \qquad (2.1)\\ & (i=1,\cdots n)\\ x_i(t_0)=x_i^0, & \qquad (2.2)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}),\\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0\end{cases}$$

的解$x_i=\varphi_i(t)(i=1,\cdots n)$ 或$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$在$t\in I$内存在、唯一及连续依赖于初值 $(t_0,x_1^0,\cdots x_n^0)$。

有时为明确（2.1)、(2.2）的解所具有的初值，也常把它的解写成

$$x_i=\varphi_i(t,t_0x_1^0,\cdots x_n^0)(i=1,\cdots n) \qquad (2.3)$$

或

$$\boldsymbol{X}=\Phi(t,t_0,\boldsymbol{X}^0).$$

对于方程组（2.1)，我们已知道它的几何解释是在$n+1$维空间$(t,x_1,\cdots x_n)$ 内确定了一个方向场，(2.1) 的解 $\varphi_i(t)$ $(i=1,\cdots n)$ 是这个空间的一条曲线，即所谓积分曲线。现在从应用上，把t理解为时间，$(x_1,\cdots x_n)$ 理解为n维空间的点，那么$f_i(x_1,\cdots x_n)$ 就是在该点的速度分量。在这种动力学解释下，我们称方程组（2.1）为动力系统（简称系统），而称n维空间 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为相空间（$n=2$时就是前面提到的相平面），相空间的点就叫相点。方程组（2.1）的每一个解对应于这个系统的一个运动，在相空间中由(2.1)的解所描述的曲线称为轨线，可见表达式$x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$，作为积分曲线（即运动）它描述的是动点的运动规律，作为轨线（这时把t看作参数）它给出了动点运动时所经

过的路线。二者的关系是，轨线是$n+1$维空间$(t, x_1, \cdots x_n)$ 中的积分曲线在相空间内的投影。它们的显著区别在于积分曲线可以不考虑方向，而轨线一定是有向曲线。

例如$x=\cos t$，$y=\sin t$是自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}$$

的解，它在三维空间 (t, x, y) 中描绘出一条螺线，而单位圆 $x^2+y^2=1$就是该解在相平面上的轨线（图7—1）。

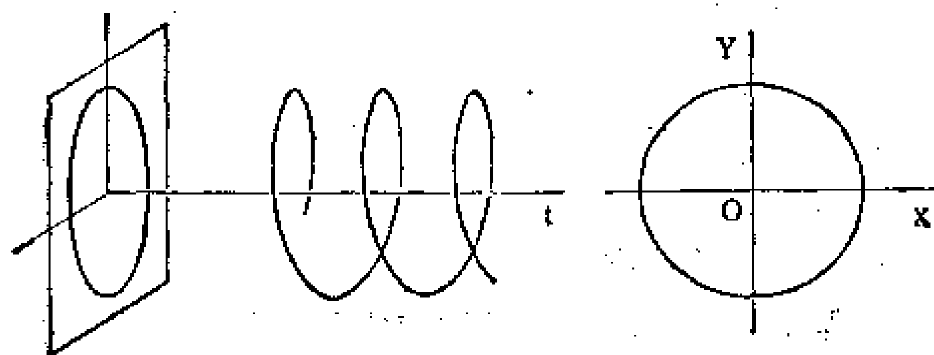


图7—1

又如$x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$是系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$$

的解，当$t\in(-\infty, \infty)$时，点集 $\{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)\}$ 在相平面 (X, Y) 上描绘出一条螺线；因此解 $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ 的轨线是一条螺线（图7—2）。

再如，对于系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3,\\ \dfrac{dy}{dt}=5,\end{cases}$$

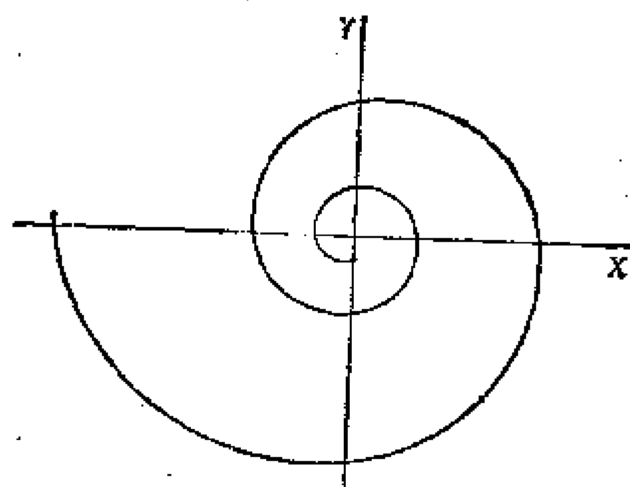


图7—2

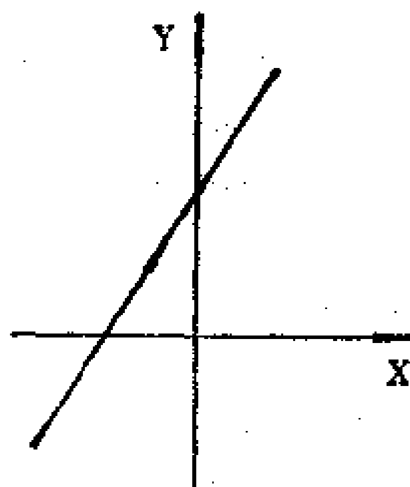


图7—3

显然$x=3t+2$，$y=5t+7(-\infty<t<+\infty)$是系统的一个解，而直线$y=\frac{5}{3}(x-2)+7$就是该解的轨线（图7—3）。

关于自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{2.1}$$

有下面几个简单而有用的性质：

性质1° 若$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是系统(2.1)的一个解，则$\boldsymbol{X}=\Phi(t+c)$也是（2.1）的解，其中c是一个常数。

证明 设解$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$的存在区间为$(a,\ \infty)$。由于$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是系统(2.1)的解，因此对每个$t\in(a,\ \infty)$有$\dfrac{d\Phi(t)}{dt}=\boldsymbol{F}(\Phi(t))$。而

$$\frac{d\Phi(t+c)}{dt}=\frac{d\Phi(t+c)}{d(t+c)}\cdot\frac{d(t+c)}{dt}=\frac{d\Phi(t+c)}{d(t+c)},$$

从而有$\frac{d\Phi(t+c)}{dt}=\boldsymbol{F}(\Phi(t+c))$，$t\in(a-c,\ \infty)$。这表明$\boldsymbol{X}=\Phi(t+c)$也是系统（2.1）的解，它的存在区间应为$(a-c,\ \infty)$。

性质2° 设系统(2.1)右端的向量函数的每个分量$f_i(x_1,\cdots x_n)(i=1,\ \cdots n)$，在相空间$(X_1,\cdots X_n)$中关于$x_1,\cdots x_n$有连续的偏微商，那么通过相空间的每一点$\boldsymbol{X}^\circ$，有且仅有一条轨线存在。

证明 由假设知道，始值问题

$$\begin{cases}\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}^\circ\end{cases}$$

存在唯一解$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$。而且解$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$的轨线通过点$\boldsymbol{X}^\circ$，即在相空间中至少有一条通过点$\boldsymbol{X}^\circ$的轨线。下面证明系统（2.1）过点$\boldsymbol{X}^\circ$的轨线是唯一的。

设系统（2.1）还有另一解$\boldsymbol{X}=\Psi(t)$的轨线也通过点$\boldsymbol{X}^\circ$，即存在$t_0\neq0$，使得$\Psi(t_0)=\boldsymbol{X}^\circ$。由性质1°知，$\boldsymbol{X}=\Psi(t_0+t)$也是(2.1)的解。可是$\Phi(t)$与$\Psi(t+t_0)$在$t=0$时都等于$\boldsymbol{X}^\circ$，由存在唯一性定理推知$\Phi(t)=\Psi(t+t_0)$，所以解$\Phi(t)$与$\Psi(t)$的轨线是相同的。也就是说，如果$\xi$是$\Phi(t)$的轨线上的点，则存在$t_1$使$\xi=\Phi(t_1)$，由于

$$\xi=\Phi(t_1)=\Psi(t_1+t_0),$$

这就说明ξ也是$\Psi(t)$的轨线上的点。反之亦然，从而性质2°得证。

性质3° 设$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是系统(2.1)的解，如果对于某个t_0和$T>0$，有$\Phi(t_0+T)=\Phi(t_0)$，则$\Phi(t+T)$必定恒等于$\Phi(t)$。

证明 因为$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是系统(2.1)的解，由性质1°知$\boldsymbol{X}=\Phi(t+T)$也是(2.1)的解，且当$t=t_0$时有$\Phi(t_0)=\Phi(t_0+T)$；由始值问题解的存在唯一性定理知，$\Phi(t)\equiv\Phi(t+T)$。即系统（2.1）的解$\Phi(t)$是以T为周期的周期函数。

§3 二维系统的奇点

这一节我们将讨论二维向量系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,\ x_2)\\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,\ x_2),
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

的相图，从而获得关于非线性微分方程的尽可能多的知识。这里要讨论的一个主要方面，是对系统(3.1)的奇点进行分类问题。为此，先对系统（3.1）的轨线求法，提供一个具体途径。设方程右端的函数$f_i(x_1,\ x_2)(i=1,2)$满足存在唯一性定理的条件，于是系统(3.1)的解在三维空间$(t,\ x_1,\ x_2)$中就决定了一条曲线(即积分曲线)，它在相平面(x_1,x_2)内的投影曲线就是所求的轨线。因此，只要$f_1(x_1,\ x_2)$，$f_2(x_1,\ x_2)$不同时为零，我们便可将系统(3.1)转化成

$$
\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2(x_1,\ x_2)}{f_1(x_1,\ x_2)},
\tag{3.2}
$$

显然一阶数量方程（3.2）的积分曲线正是系统（3.1）在相平面的轨线，而且只存在f_1与f_2不同时为零的情况下，方程（3.2）的积分曲线才是系统（3.1）的轨线。

如果有点$(x_1^0,\ x_2^0)$，同时满足$f_1(x_1^0,\ x_2^0)=f_2(x_1^0,x_2^0)=0$，而$x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$显然是系统（3.1）的解。这时，我们把相平面上的点$(x_1^0,\ x_2^0)$理解为解的轨线，同时这个点也就是§1中所谓的平衡点。

例1
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(1-x^2-y^2),\\ \dfrac{dy}{dt}=-x(1-x^2-y^2).\end{cases}$$

解 化此二维系统为一阶数量方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

其曲线积分族是同心圆$x^2+y^2=c^2$. 但原系统的轨线应是圆$x^2+y^2=c^2(c\neq1)$，以及单位圆$x^2+y^2=1$上的各个点.

1.常点与奇点. 我们将相平面上的点作如下的分类：

若点（x_1^0，x_2^0）对于系统（3.1）来说，有

$$f_1^2(x_1^0,\ x_2^0)+f_2^2(x_1^0,\ x_2^0)\neq0,$$

则称它为常点；而

$$f_1^2(x_1^0,\ x_2^0)+f_2^2(x_1^0,\ x_2^0)=0$$

则称它为奇点.

如果点(x_1^0，x_2^0)是奇点，那么$x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$就是系统(3.1)的解；根据前面的讨论不难得出，在相平面上，奇点本身就是轨线，从而也是平衡点，对于常点，则有轨线通过.

设$x_1=\varphi_1(t)$、$x_2=\varphi_2(t)$是系统（3.1）的一个解；关于奇点，我们给出以下两个性质.

性质1° 如果$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_1(t)=\alpha$，$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_2(t)=\beta$. 那么点($\alpha$，$\beta$)是系统（3.1）的奇点，即

$$f_1(\alpha,\ \beta)=f_2(\alpha,\ \beta)=0.$$

证明 若$f_1^2(\alpha,\ \beta)+f_2^2(\alpha,\ \beta)\neq0$，则其中至少有一个不为零，无妨设$f_1(\alpha,\ \beta)\neq0$，令

$$|f_1(\alpha,\ \beta)|=K>0,$$

于是存在T，当$t>T$时，有，

$$|f_1(x_1, x_2)| = \left|\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\right| > \frac{1}{2}K.$$

因此，对于任意$t_2>t_1>T$，有

$$|\varphi_1(t_2)-\varphi_1(t_1)| = (t_2-t_1)|\varphi_1'(t^*)|$$
$$> \frac{1}{2}K(t_2-t_1),$$

其中$t^*\in(t_1, t_2)$。今取$t_2-t_1\geqslant 1$，便得

$$|\varphi_1(t_2)-\varphi_1(t_1)| > \frac{1}{2}K.$$

根据哥西准则，此式与所设$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_1(t)$存在相矛盾。所以$f_1^2(\alpha,\beta)+f_2^2(\alpha,\beta)=0$，即点（$\alpha$，$\beta$）是系统（3.1）的奇点。

性质2° 如果$\lim\limits_{t\to t^*}\varphi_1(t)=\alpha$，$\lim\limits_{t\to t^*}\varphi_2(t)=\beta$，又

$$f_1(\alpha, \beta)=f_2(\alpha, \beta)=0,$$

那么$t^*=\infty$。

证明 若t^*是有限值，根据解的唯一性，系统（3.1)不可能有异于常数$x_1=\alpha$，$x_2=\beta$的解。所以从极限存在的假设推知t^*不可能是有限的。

例2
$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1-x_2,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2.\end{cases}$$

解 该系统的轨线参数表示式为

$$x_1=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t),$$
$$x_2=e^{-t}(-c_1\sin t+c_2\cos t),$$

其中t是参数，c_1，c_2是任意常数．只要$(x_1^0, x_2^0)\neq(0,0)$，那么过点(x_1^0, x_2^0)有且仅有一条轨线；此轨线不通过点（0，0)，但当

$t\to\infty$时它以点（0，0）为极限．所以（x_1^0，x_2^0）是常点，（0，0）是奇点．从而点（0，0）是轨线，而且趋向于它的轨线有无穷多条（图7—4）。

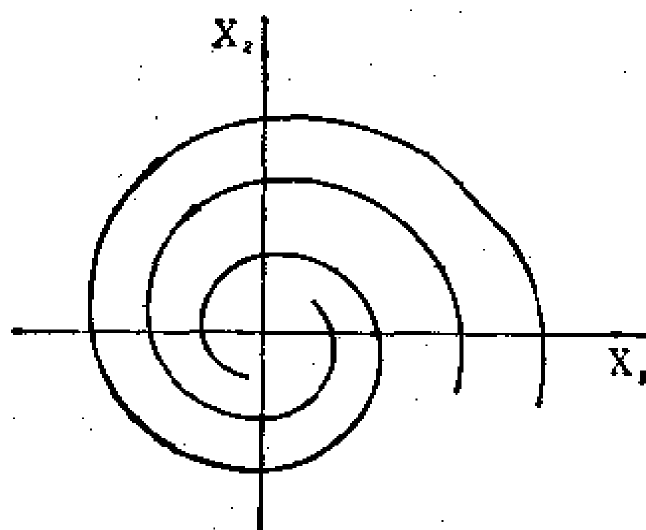


图7—4

2.奇点的类型．对于非线性系统的问题，在一定的条件下，它是可以通过研究有关线性系统而求得解决的．因此本段我们只讨论最简单的自治系统，研究其轨线在奇点邻域的分布性状，从而将奇点进行分类。

考察常系数系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=ax_1+bx_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=cx_1+dx_2\end{cases}\tag{3.3}$$

它的向量形式可写为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=A\mathbf{X},$$

这里A是实数矩阵

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

我们总假定行列式

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

显然坐标原点（0，0）是系统（3.3）的唯一奇点。

根据高等代数知识，对矩阵A必存在非异的实矩阵 T，使得$T^{-1}AT$为约当标准型J，于是作变换$X=TY$,系统(3.3) 就可化成

$$\frac{dY}{dt}=T^{-1}ATY=JY$$

由矩阵A的特征根可能是实数λ、μ，也可能是复数$\alpha\pm i\beta$的不同，对应的约当标准型分别为：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

由于非异的线性变换不改变轨线的性状，因此，我们不妨假定系统(3.3)已是化成了标准形式。下面我们将证明，系统(3.3)的奇点(0，0)的类型，可由λ和μ的不同情况而确定。

1) λ、μ是不同的实数，且$\lambda\mu>0$。这时矩阵$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$,而系统(3.3)为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\lambda x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\mu x_2 \end{cases} \tag{3.4}$$

当以$-x_1$代x_1或$-x_2$代x_2或同时用$-x_1$，$-x_2$分别代替x_1，x_2时，系统(3.4)不改变。因此，系统(3.4)的轨线关于OX_1轴和OX_2轴是对称的，故我们只考察相平面上位于第一象限的轨线，已知轨线的参数表达式是

$$x_1(t)=c_1e^{\lambda t},\ x_2(t)=c_2e^{\mu t}, \tag{3.5}$$

这里任意常数$c_1\geqslant 0$，$c_2\geqslant 0$。

当$c_1=0, c_2\neq 0$时，$x_1=0, x_2=c_2e^{\mu t}$，表明半轴OX_2是轨线；当$c_1\neq 0$，$c_2=0$时，$x_1=c_1e^{\lambda t}$，$x_2=0$，表明半轴OX_1是轨线。

i）λ和μ都是负数，如$\mu<\lambda<0$，这时

$$x_2(t)=c_2(e^{\lambda t})^{\frac{\mu}{\lambda}}=\frac{c_2}{c_1^{\mu/\lambda}}(x_1(t))^{\frac{\mu}{\lambda}}.$$

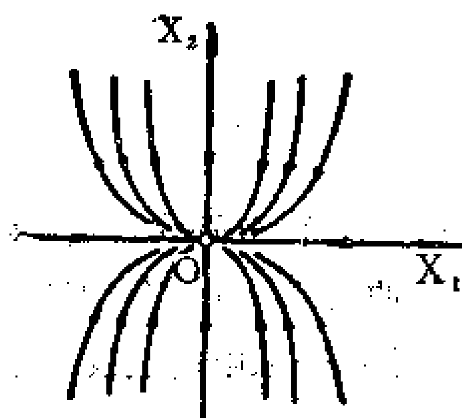
即 $$x_2=cx_1^{\frac{\mu}{\lambda}},\quad \left(\frac{\mu}{\lambda}>1\right) \tag{3.6}$$

可见轨线是抛物型曲线族。由(3.5)得

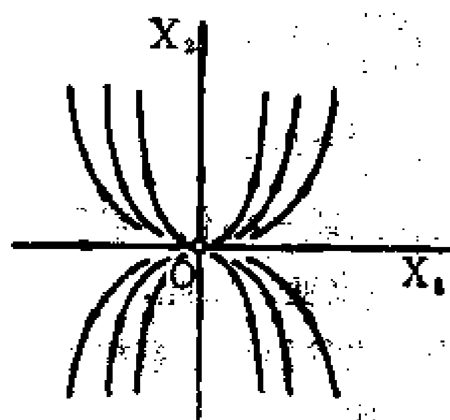
$$\lim_{t\to+\infty}x_1(t)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}x_2(t)=0,$$

即原点是奇点；并且由$\frac{dx_2}{dx_1}=c\frac{\mu}{\lambda}x_1^{\frac{\mu}{\lambda}-1}$推出，轨线除$x_1=0(c=\infty)$外，都在坐标原点与$OX_1$轴相切。所以，在相平面上，当$t\to\infty$时，位于原点附近的一切点都沿着轨线趋向坐标原点。图7—5划出了奇点周围的轨线分布情况，我们称这种奇点为稳定结点。

ii）λ和μ都是正的。如$0<\lambda<\mu$，可作类似地讨论，所不同的是轨线的方向与i）相反（图7—6），这种奇点称为不稳定结点。



$(\mu<\lambda<0)$
图7—5



$(\mu>\lambda>0)$
图7—6

2) λ, μ是不同实根，且$\lambda\mu<0$.这时矩阵$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$,所以系统(3.3)仍可写成(3.4)的形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\lambda x_1,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\mu x_2.\end{cases}\tag{3.7}$$

显然轨线关于每个坐标轴都是对称的，从而我们只在第一象限考虑系统(3.7)的轨线。

选取特征根的符号为$\lambda<0<\mu$. 由系统(3.7)得一阶数量方程

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\mu}{\lambda}\frac{x_2}{x_1}\tag{3.8}$$

积分得

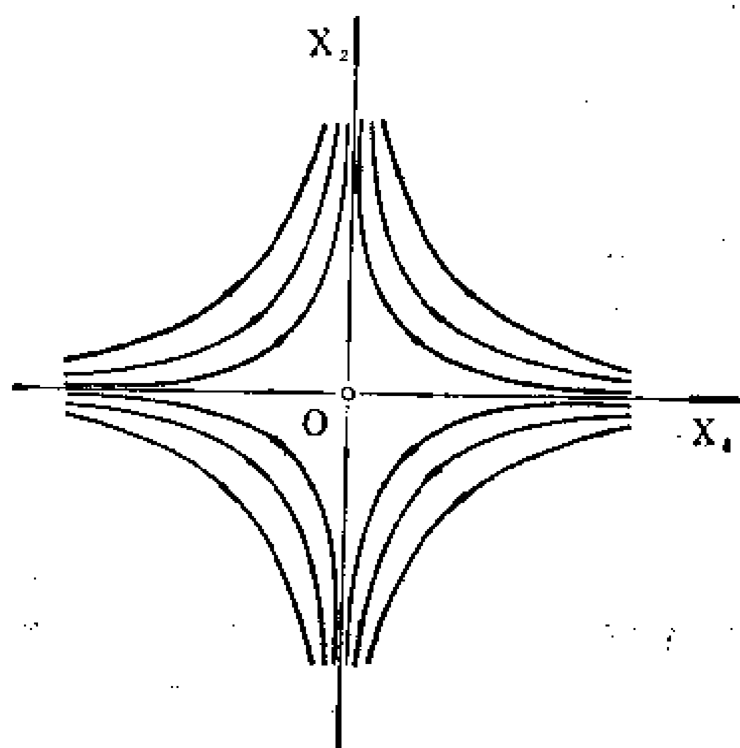
$$x_1^{\mu}x_2^{-\lambda}=c,\quad (c>0)$$

因为$\lambda<0$,可见系统(3.7)的轨线是双曲型曲线族。若令$c=0$，即得$x_1=0$和$x_2=0$。它们满足方程(3.8)，从而半轴OX_1和OX_2也是系统(3.7)的轨线。

由$\lambda<0$，$\mu>0$，$x_1>0$，$x_2>0$推知，$\dfrac{dx_1}{dt}=\lambda x_1<0$，$\dfrac{dx_2}{dt}=\mu x_2>0$，所以当$t$递增时，$x_1(t)$递减，$x_2(t)$递增；而且在$OX_1$上有$\dfrac{dx_1}{dt}=\lambda x_2<0$，$\dfrac{dx_2}{dt}=0$，表明$x_1(t)$随着$t$的递增而递减；在半轴$OX_2$上有$\dfrac{dx_1}{dt}=0$，$\dfrac{dx_2}{dt}=\mu x_2>0$，表明$x_2(t)$随着$t$的递增而递增。再利用对称性，便得出相平面上系统(3.7)的轨线在奇点(0,0)附近的性状(图3—7)此种奇点我们称它为鞍点。

3) 特征根是共轭复数$\alpha\pm i\beta$，且$\alpha\neq0$（不妨设$\beta>0$），这时矩阵$J=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$，而系统(3.3)为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + \beta x_1, \\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 + \alpha x_2 .
\end{cases}
\tag{3.9}
$$



$(\lambda < 0 < \mu)$

图7—7

改用极坐标，作变换

$$
\begin{cases}
x_1 = \rho\cos\theta, \\
x_2 = \rho\sin\theta .
\end{cases}
$$

由于

$$
\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\theta + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt},
$$

再利用恒等式

$$
x_1\frac{dx_1}{dt} + x_2\frac{dx_2}{dt} = \rho\frac{d\rho}{dt}, \quad x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt} = \rho^2\frac{d\theta}{dt},
$$

便把系统(3.9)化成

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho}{dt}=\alpha\rho\\ \dfrac{d\theta}{dt}=-\beta\end{cases}\tag{3.10}$$

系统(3.10)的轨线参数式为

$$\begin{cases}\rho(t)=\rho_0 e^{\alpha t},\\ \theta(t)=-\beta t+\theta_0.\end{cases}$$

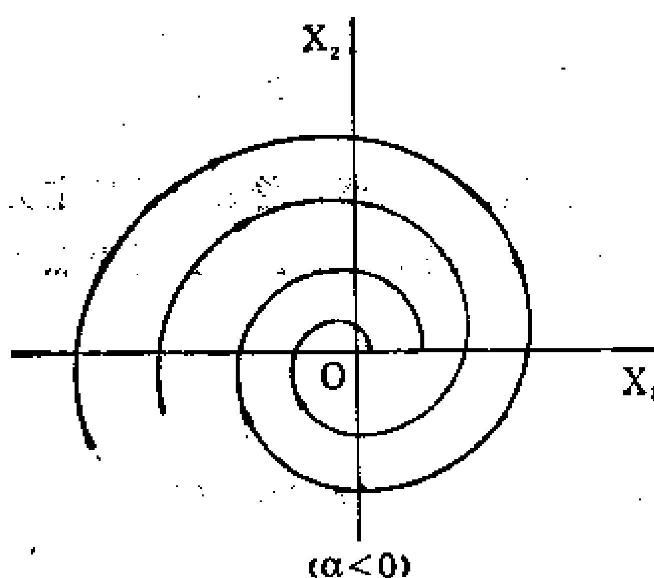
其中$\rho_0>0$，θ_0是任意常数，从而有

$$\rho=\rho_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta_0-\theta)}=ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}\tag{3.11}$$

可见系统(3.9) 的轨线是一族对数螺线，它围绕着原点以顺时针方向(因$\beta>0$)盘旋。

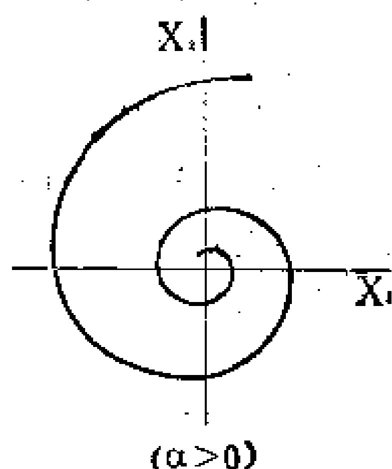
当$\alpha<0$时，随着t的递增ρ将递减，轨线将卷向坐标原点(图7—8)。此种奇点称为稳定焦点。

当$\alpha>0$时，随着t的递增ρ也递增。轨线越来越远离坐标原点(图7—9)。此种奇点称为不稳定焦点。



$(\alpha<0)$

图7—8



$(\alpha>0)$

图7—9

4） λ和μ是相等的实数，这时矩阵J是$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$。因此分两种情形讨论：

i） $J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，此时系统(3.3)为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\lambda x_1\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\lambda x_2\end{cases}\tag{3.12}$$

显然系统(3.12)的轨线关于坐标轴对称，这样在相平面上只考察第一象限的轨线性态就可以了。由系统(3.12)得一阶微分方程

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{x_2}{x_1}\tag{3.13}$$

积分得

$$x_2=cx_1\qquad (c\geqslant 0)\tag{3.14}$$

(3.14)表明，系统(3.12)的轨线是顶点在原点(不包含原点在内)的半射线，当$c=0$和$c=\infty$时，轨线就是半轴OX_1和OX_2。

当$\lambda<0$时，有

$$\frac{dx_1}{dt}=\lambda x_1<0,\quad \frac{dx_2}{dt}=\lambda x_2<0,\quad (x_1,x_2>0).$$

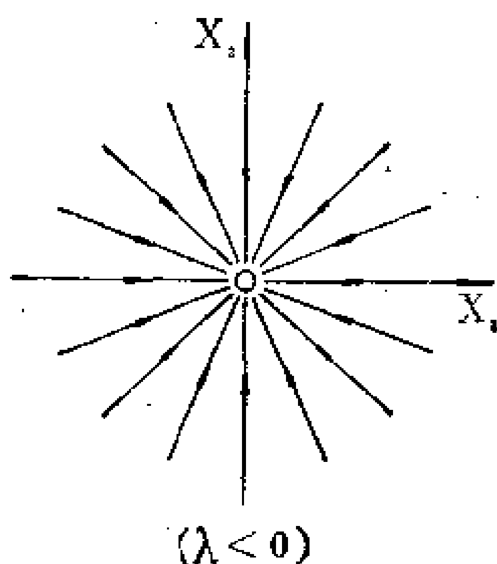
表明t递增时$x_1(t)$，$x_2(t)$递减。就是说，轨线沿着各自的确定方向趋于原点，半轴OX_1和OX_2也同样，如图7—10。称此种奇点为稳定临界结点。

当$\lambda>0$时，有

$$\frac{dx_1}{dt}=\lambda x_1>0,\quad \frac{dx_2}{dt}=\lambda x_2>0\qquad (x_1,x_2>0).$$

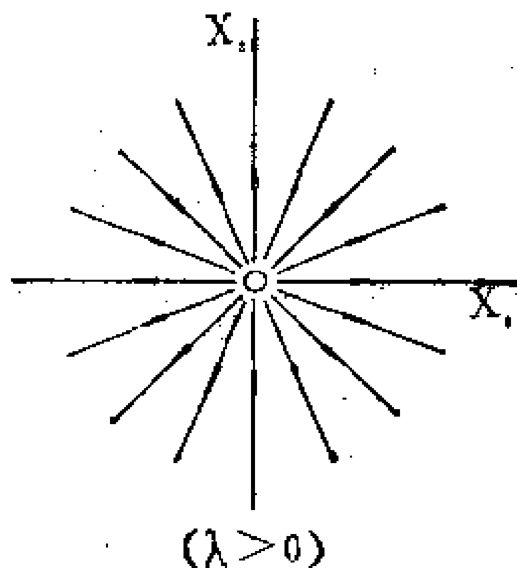
表明t递增时$x_1(t)$，$x_2(t)$递增．就是说轨线愈来愈远离原点，半

轴OX_1和OX_2也同样，如图7—11。称此种奇点为不稳定临界结点。



$(\lambda<0)$

图7—10



$(\lambda>0)$

图7—11

ii) $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，此时系统(3.3)为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\lambda x_1+x_2\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=\lambda x_2\end{cases}\tag{3.15}$$

若用$-x_1$，$-x_2$分别代替(3.15)中的x_1,x_2，系统(3.15)不变，因此它的轨线关于坐标原点对称。这样就可以只在上半相平面内考察其轨线的性态。

轨线的参数式为

$$x_1(t)=(c_1+c_2t)e^{\lambda t},\ \ x_2(t)=c_2e^{\lambda t}\tag{3.16}$$

其中c_1,c_2是非负的任意常数，若$c_1\neq0,c_2=0$，则$x_1(t)=c_1e^{\lambda t}$，$x_2(t)=0$。这表明X_1轴的正、负半轴都是系统的轨线。若$c_2\neq0$，则由(3.16)推知，当$t=-\dfrac{c_1}{c_2}$时$x_1(t)=0$。这时轨线与半轴OX_2

的交点为$\left(0,\ c_2 e^{-\frac{c_1}{c_2}t}\right)$。

当$\lambda<0$时，由$\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t)=0$知，轨线趋向原点，并且由

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x_2(t)}{x_1(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{c_2}{(c_1+c_2t)}=0$$

知轨线在$t=-\frac{c_1}{c_2}$时越过半轴OX_2后与半轴OX_1相切于原点（图7—12）。这就说明所有轨线都沿着同一个方向趋于原点。凡奇点附近的轨线具有此种性态时，称此奇点为稳定退化结点。

当$\lambda>0$时，可作同样的讨论，所不同的是轨线愈来愈远离原点。并且是往左侧远离坐标原点的（图7—13）。此种奇点叫做不稳定退化结点。

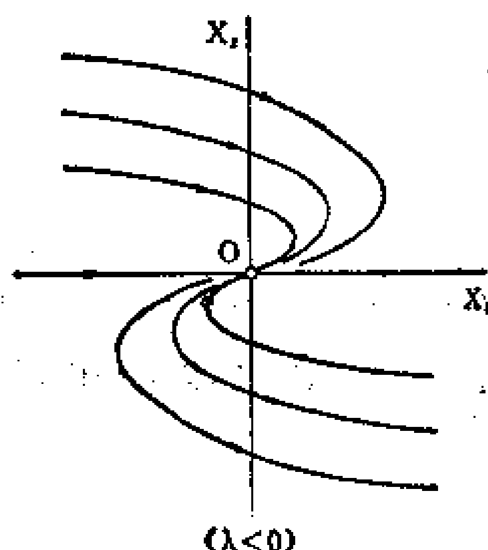


图7—12

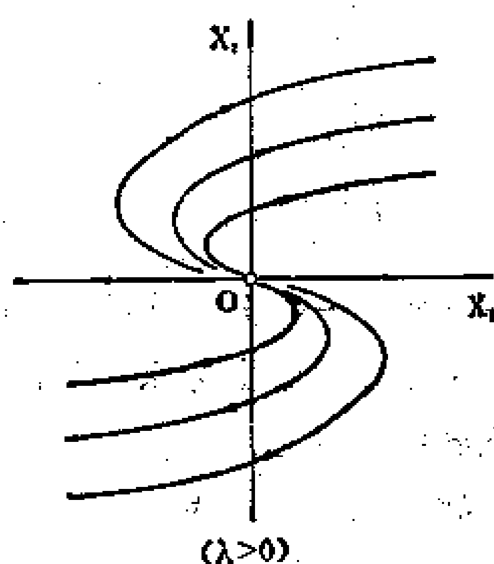


图7—13

5）特征根是共轭纯虚数$\pm i\beta$，且$\beta\neq0$。此时矩阵$J=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ -\beta & 0\end{pmatrix}$，从而系统(3.3)为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\beta x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\beta x_1.\end{cases}\tag{3.17}$$

显然，系统(3.17)就是3)中$\alpha=0$的形式。若改用极坐标，则系统(3.17)的轨线参数式可写为

$$\rho=\rho_0,\quad \theta(t)=-\beta t+\theta_0;\tag{3.18}$$

其中$\rho_0(>0)$。θ_0是任意常数。(3.18)表明每个轨线都是环绕原点的闭曲线圆。我们称此种奇点为中心。

当$\beta<0$时，轨线的方向是按逆时针(图7—14(a))，而当$\beta>0$时，轨线的方向是按顺时针(图7—14(b))。

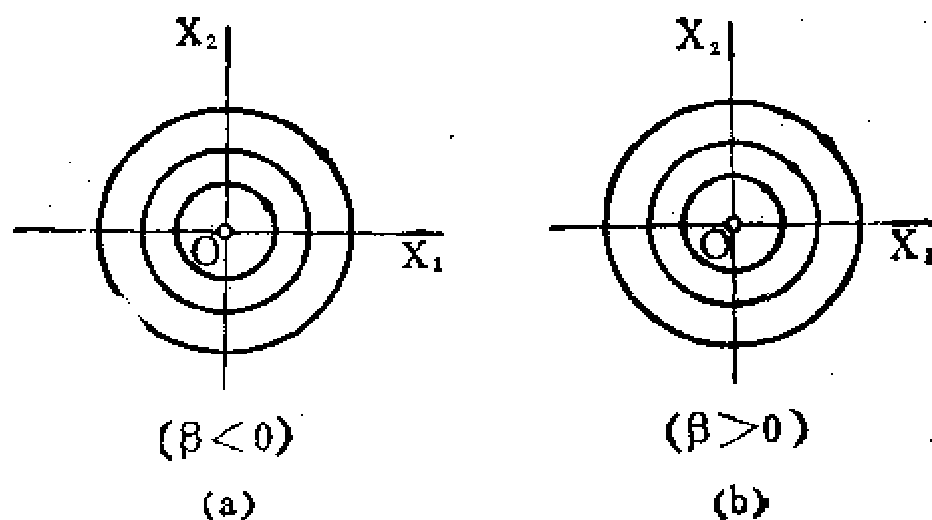


图7—14

例3 判别系统

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1-3x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-3x_1+x_2$$

的奇点类型，并画出相图。

解 这里 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$且$\det A\neq 0$。显然原点(0，0)是系统的唯一奇点. 由特征方程

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=0,$$

得$\lambda=-2$，$\mu=4$，故奇点(0，0)是鞍点。

对系统作非异的线性变换

$$\begin{cases}\xi=3x_1+3x_2,\\ \eta=3x_1-3x_2,\end{cases}$$

于是得到

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=-2\xi,\\[2ex] \dfrac{d\eta}{dt}=4\eta,\end{cases}$$

故轨线在奇点附近的分布如图7—15。

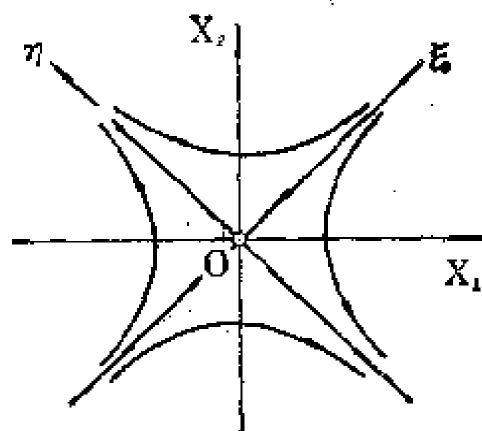


图7—15

至于一般非线性系统的定性研究，已超出本课程讨论范围，在此从略。

§4 稳定性的概念

人们为了能够用数学描述某些现象，往往需要丢弃一些因素，抽出最本质的，然后将它抽象化. 例如，从许多力学问题中归纳出的微分方程(组)就是这样. 但是，未被考虑的因素有时也会产生强烈的影响. 它们可以瞬时地起作用，从而引起初始值的变化；也可以持续地起作用，从而引起方程的变化. 通常我们称这些因

素为干扰。微小的干扰对不同的运动影响是不同的.对某些运动，这种影响并不显著，因而受干扰的运动与未受干扰的运动相差甚微；对于另一些运动，干扰的影响可能就很显著，以致于无论干扰力多么小，受干扰的运动与未受干扰的运动都会相差很大。前者的运动称为稳定的，而后者的运动称为是不稳定的。

稳定性就是研究干扰性因素对系统运动的影响（本节指瞬时性干扰）问题，并建立一些法则，用来判断所考察的运动是否是稳定的。

考察自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{4.1}$$

并设其对初值$(t_0,\boldsymbol{X}^0)$存在唯一解$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)$，我们称它为(4.1)的一个运动,同时这个运动是未受干扰的运动；而其它的解$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Psi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^a)$所对应的运动称为受干扰的运动。现在的问题是：当$\|\boldsymbol{X}^a-\boldsymbol{X}^0\|$很小时，差$\|\boldsymbol{\Psi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^a)-\boldsymbol{\Phi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)\|$的变化是否也很小．即对初始数据足够小的变化，所引起解的变化是否可任意小？

为简单起见，我们仅在区域

$$G_1=\{(t,x_1\cdots x_n);\ 0\leqslant t<\infty,\ (x_1,x_2\cdots x_n)\in D\}$$

中进行讨论．对于t在有限区间$t_0\leqslant t\leqslant T$上变化时，引起解的变化问题，在第四章已讨论过，得到了解对初始值的连续性定理；对于一切$t\geqslant t_0$，包括$t\to\infty$时的情况，这就是本节的内容。即当$\|\boldsymbol{X}^a-\boldsymbol{X}^0\|$很小时，对于一切$t\geqslant t_0$，若$\|\boldsymbol{\Psi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^a)-\boldsymbol{\Phi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)\|$也很小，则称运动$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)$是稳定的；否则是不稳定的。

下面给出运动稳定性的定义。

关于自治系统(4.1)，设其解为$X=\Phi(t)$，这里$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$所满足的条件与§2同。按照李雅普诺夫意义下的稳定性概念是：

定义1 设$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是系统(4.1)的一个解，如果对于任一$\varepsilon>0$，总存在着$\delta(\varepsilon,t_0)>0$ $(t_0\geqslant 0)$，使得(4.1)的任一满足条件

$$\|\Phi(t_0)-\boldsymbol{X}(t_0)\|<\delta^* \tag{4.2}$$

的其它解$\boldsymbol{X}(t)$，对于一切$t\geqslant t_0$，有不等式

$$\|\Phi(t)-\boldsymbol{X}(t)\|<\varepsilon \tag{4.3}$$

成立，则称系统(4.1)的解$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是稳定的。

如果对任意小的$\delta>0$，不等式(4.3)不成立，则称系统(4.1)的解是不稳定的。

定义2 如果系统(4.1)的解$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是稳定的，且存在$\sigma>0$，使得任何满足不等式

$$\|\Phi(t_0)-\boldsymbol{X}(t_0)\|<\sigma \tag{4.4}$$

的解$\boldsymbol{X}(t)$，具有性质

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t)-\boldsymbol{X}(t)\|=0 \tag{4.5}$$

则称系统(4.1)的解$\boldsymbol{X}=\Phi(t)$是渐近稳定的。

例1 对于系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1-2x_2.\end{cases}$$

考察满足初始条件$x_1(0)=0$，$x_2(0)=1$的解的稳定性。

解 已知系统满足条件$x_1(0)=0$，$x_2(0)=1$的解为

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=e^{-t}\sin t\\ \varphi_2(t)=e^{-t}(\cos t-\sin t)\end{cases}$$

* 这里向量$\mathbf{X}=(x_1,\cdots,x_n)^T$的范数取为$\|\mathbf{X}\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

它对应着未受干扰的运动。

现考察初始条件为

$$x_1(0)=\eta_1, \qquad x_2(0)=1+\eta_2,$$

的解

$$\begin{cases}\psi_1(t)=e^{-t}[\eta_1\cos t+(1+\eta_1+\eta_2)\sin t],\\ \psi_2(t)=e^{-t}[(1+\eta_2)\cos t-(2\eta_1+\eta_2+1)\sin t],\end{cases}$$

它对应着受干扰的运动。从而差值为

$$\psi_1(t)-\varphi_1(t)=e^{-t}[\eta_1\cos t+(\eta_1+\eta_2)\sin t],$$

$$\psi_2(t)-\varphi_2(t)=e^{-t}[\eta_2\cos t-(2\eta_1+\eta_2)\sin t].$$

对于一切$t\geqslant 0$，这些差为η_1,η_2的连续函数，因而解

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=e^{-t}\sin t,\\ \varphi_2(t)=e^{-t}(\cos t-\sin t).\end{cases}$$

是稳定的。又因为

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t)-\psi(t)\|=0,$$

所以解还是渐近稳定的。

为了简化解的形式，我们总可作一个未知函数的变换，令

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{\Phi}(t),$$

则(4.1)变为

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}-\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\Phi})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}) \tag{4.6}$$

这时系统(4.1)的解$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}(t)$就对应着系统(4.6)的零解$\boldsymbol{Y}=0$。并且可把系统(4.1)的解$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}(t)$的稳定性的研究转化为对系统(4.6)的零解的稳定性的研究。

以后我们不妨认为对系统(4.1)已经这样做了，因而，恒假定$\boldsymbol{F}(0)=0$。这时定义1和定义2中的(4.2)，(4.3)，(4.4)和(4.5)各式依次化为

$$\|\mathbf{X}(t_0)\|<\delta \tag{4.7}$$

$$\|\mathbf{X}(t)\|<\varepsilon \tag{4.8}$$

$$\|\mathbf{X}(t_0)\|<\sigma \tag{4.9}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{X}(t)\|=0 \tag{4.10}$$

对于$n=2$的情形，可利用图形示意，从而使零解的稳定、渐近稳定与不稳定等概念清晰而直观(图7—16)，顺便指出，关于不稳定的情形，随着时间t的增加，受干扰运动的轨线将越出ε—邻域。显然，系统(4.1)的解$\mathbf{X}=\mathbf{\Phi}(t)$ $(t\geq t_0\geq 0)$，如果对于初始时刻$t_0\in[0,\infty)$是稳定的，依据解对初始数据的连续性可知，对于任意$t'\in[0,t_0]$，也是稳定的，因此，讨论解的稳定性时，可以取初始时刻$t_0=0$。

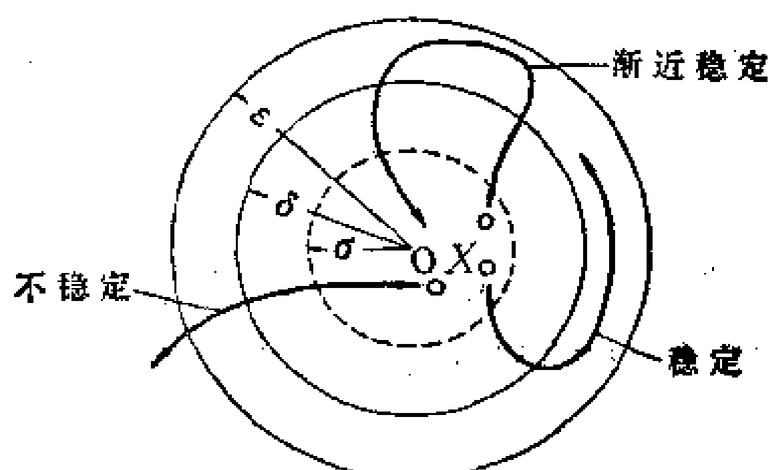


图7—16

例2 考察系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1.\end{cases}$$

的零解的稳定性。

解 对于一切$t\geqslant 0$，系统满足初始条件$x_1(0)=x_1^0$，$x_2(0)=x_2^0$ $(x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2}\neq 0)$的解为

$$\begin{cases}x_1(t)=x_1^0\cos t+x_2^0\sin t,\\ x_2(t)=-x_1^0\sin t+x_2^0\cos t.\end{cases}$$

对任一$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，当$(x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2})^{\frac{1}{2}}<\delta$时，有

$$[x_1^2(t)+x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}}=[(x_1^0\cos t+x_2^0\sin t)^2+(-x_1^0\sin t+x_2^0\cos t)^2]^{\frac{1}{2}}=(x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2})^{\frac{1}{2}}<\delta=\varepsilon.$$

故系统的零解是稳定的。

然而，由于

$$\lim_{t\to\infty}[x_1^2(t)+x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}}=(x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2})^{\frac{1}{2}}\neq 0,$$

所以零解不是渐近稳定的。

例3 对于系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-x_2,\end{cases}$$

考察零解的稳定性。

解 在$t\geqslant 0$上，取初值为$(0,x_1^0,x_2^0)$的解为：

$$\begin{cases}x_1(t)=x_1^0e^{-t},\\ x_2(t)=x_2^0e^{-t}.\end{cases}$$

这里$x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2}\neq 0$，显然系统的零解是稳定的。

又因

$$\lim_{t\to\infty}[x_1^2(t)+x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\infty}(x_1^{0\,2}e^{-2t}+x_2^{0\,2}e^{-2t})^{\frac{1}{2}}=0,$$

可见系统的零解也是渐近稳定的。

例4 考察系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2,\end{cases}$$

的零解的稳定性。

解 以$(0,x_1^0,x_2^0)$为初值的解为

$$\begin{cases}x_1(t)=x_1^0e^t,\\ x_2(t)=x_2^0e^t,\end{cases}\qquad (t\geqslant 0)$$

这里$x_1^{0^2}+x_2^{0^2}\neq 0$，由于函数$e^{2t}$随着$t$的递增而无限地增大。因此，对于任意的$\varepsilon>0$，不管$(x_1^{0^2}+x_2^{0^2})^{\frac{1}{2}}$取得怎样小，只要$t$取得适当大时，就不能保证$(x_1^{0^2}e^{2t}+x_2^{0^2}e^{2t})^{\frac{1}{2}}$小于预先给定的正数$\varepsilon$，所以系统的零解是不稳定的。

§5 V 函 数

上一节我们介绍了稳定性的概念，但据此来判明系统解的稳定性，其可能性是极其微小的。这是由于能求出解的系统是极其少见的。李雅普诺夫创立了一种直接方法（或称李雅普诺夫第二方法）使得有可能利用系统本身，判断出解的稳定性质。直接方法的大意是仅借助于一个所谓李雅普诺夫函数$V(x)$，和通过微分方程系统所计算出来的$\dfrac{dV}{dt}$的符号性质，直接推断出解的稳定性。

1.关于函数$V(x_1,\cdots x_n)$或$V(X)$的几个定义。我们总假定$V(x_1,\cdots x_n)$是具有下述性质的一类数值函数：它是定义在坐标原点的某邻域内的单值实函数，关于$x_1,\cdots x_n$有连续的一阶偏导数，并且

$$V(0,\cdots,0)=0 \quad \text{或} V(\mathbf{0})=0。\tag{6.1}$$

定义3 如果当

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho \quad \text{或} \quad \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho \tag{5.2}$$

(ρ是适当小的正数）并且$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$时，恒有

$$V(x_1,\cdots,x_n)>0。$$

则函数$V(x_1,\cdots x_n)$ 或$V(\mathbf{X})$叫做定正的。若 $-V(x_1,\cdots,x_n)$ 或 $-V(\mathbf{X})$是定正的，则称$V(x_1\cdots x_n)$或$V(\mathbf{X})$是定负的。

定义4 如果在域(5.2)上恒有$V(x_1,\cdots x_n)\geqslant 0$，则函数$V(x_1,\cdots x_n)$或$V(\mathbf{X})$叫做常正的。

若$-V(x_1,\cdots x_n)$ 或$-V(\mathbf{X})$是常正的，则称 $V(x_1\cdots x_n)$ 或$V(\mathbf{X})$是常负的。

定义5 如果无论ρ多么小，在域(5.2)内,$V(x_1,\cdots x_n)$既具有正值也具有负值，则函数$V(x_1\cdots x_n)$或$V(\mathbf{X})$叫做变号的。

例如：

(1) $V(x_1,x_2)=K(x_1^2+x_2^2)$，当$K>0$时是定正的，而$K<0$时是定负的；

(2) $V(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2$是常正的；

(3) $V(x_1,x_2)=-x_1^2-(3x_1+2x_2)^2$是定负的；

(4) $V(x_1,x_2)=x_1x_2+x_2^2$是变号的；

(5) $V(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)(1-x_1^2-x_2^2)$在域$x_1^2+x_2^2\leqslant\rho$ $(0<\rho<1)$ 上是定正的；

(6) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$是常正的；

(7) $V(x_1,x_2,x_3)=\sin(x_1+x_2+x_3)$是变号的；

(8) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^4+x_3^2-x_3^3$ 在域 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant\rho$ $(0<\rho<1)$ 上是定正的。

关于函数V，我们给出下面两个有用的性质：

性质1° 设$V(\boldsymbol{X})$在域$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho$上定正（不一定可微），则对于任意数$l>0$，必存在$\eta>0$ $(\eta<\rho)$，使得满足

$$V(\boldsymbol{X})\geqslant l$$

的$\boldsymbol{X}$有

$$\|\boldsymbol{X}\|\geqslant\eta.$$

事实上，由$V(\boldsymbol{X})$在$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho$上定正可知，$V(\boldsymbol{X})$在$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho$上连续，$V(0)=0$，且当$\|\boldsymbol{X}\|\neq0$时，$V(\boldsymbol{X})>0$。

由$V(\boldsymbol{X})$在$\boldsymbol{X}=0$处的连续性可知，对任给$l>0$，必存在$\eta>0$ $(\eta<\rho)$，当$\|\boldsymbol{X}\|<\eta$时，有

$$V(\boldsymbol{X})=|V(\boldsymbol{X})|=|V(\boldsymbol{X})-V(0)|<l.$$

从而可知，若要$V(\boldsymbol{X})\geqslant l$，必有$\|\boldsymbol{X}\|\geqslant\eta$。

性质2° 设$V(\boldsymbol{X})$在域$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho$上定正（不一定可微），那么对于任意正数$\eta<\rho$，存在数$m>0$，使得当$\eta\leqslant\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho$时，有

$$V(\boldsymbol{X})\geqslant m.$$

事实上，只需取 $m=\inf\limits_{\eta\leqslant\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho}V(\boldsymbol{X})$便可。

2. 定号函数的几何解释。为简单明确起见，不妨取$n=2$，且$V(x_1, x_2)$在域

$$(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho \tag{5.3}$$

上是定正的。考虑曲线族

$$V(x_1, x_2)=c, \tag{5.4}$$

其中c是正数，当$c=0$时，由于$V(x_1, x_2)$是定正的，我们有$x_1=x_2=0$，就是曲线$V(x_1, x_2)=0$退化为坐标原点。下面将证

明，当 c 足够小时，曲线族(5.4)是包围坐标原点的封闭曲线族*(图7—17)。

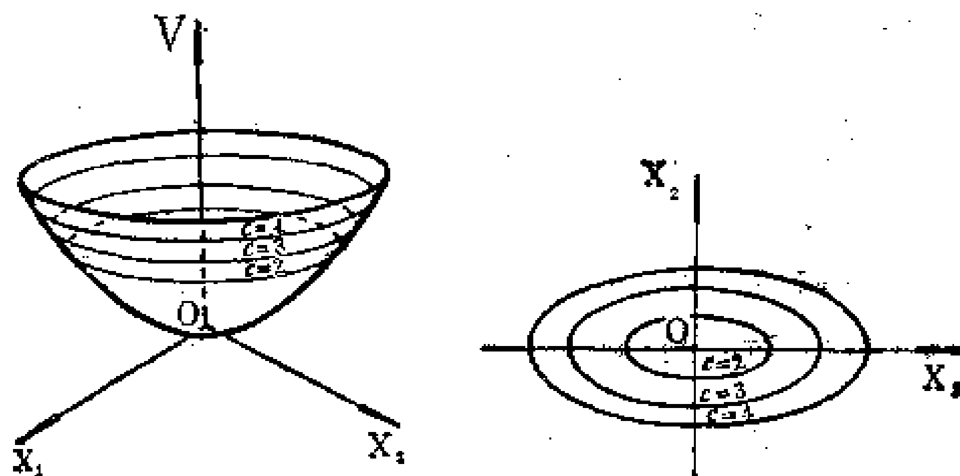


图7—17

为此，我们证明：当 c 不超过某一个只与 ρ 有关的足够小的正数 l 时，任一从坐标原点出发到区域(5.3)的边界上任一点的连续曲线 Γ 一定和曲线(5.4)相交。设

$$l=\inf_{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}=\rho} V(x_1,\ x_2),$$

因而在(5.3)的边界上 $V(x_1,\ x_2)\geqslant l$，由于 $V(x_1,\ x_2)$ 是定正的，故 $l>0$。现在我们考虑任给的连续曲线 Γ，在 Γ 的起点(0，0)处，$V=0$，而在 Γ 的终点(在(5.3)的边界上) $V=a\geqslant l$，由 V 的连续性可知，只要 c 小于 l，V 在 Γ 上的某一点就必然要取值 c，换句话说，曲线 Γ 必与曲线 $V=c$ 相交。因此，当 c 足够小时，曲线族(5.4)是包围坐标原点的封闭曲线族。另外，由于 $V(x_1,\ x_2)$ 是单值的，所以这族曲线是彼此不相交的。

这里，要强调指出，如果 c 不是足够小，曲线族 $V=c$，未必是包围坐标原点的封闭曲线。例如：函数

* 对于曲线 $V=c$，我们假定它是由连通的一支组成。

$$V(x_1, x_2)=x_2^2+\frac{x_1^2}{1+x_1^2}$$

是定正的，曲线族$V(x_1, x_2)=c$仅当$c<1$时，才是封闭的，而当$c\geq 1$时，则是两支无公共点的曲线(图7—18)。

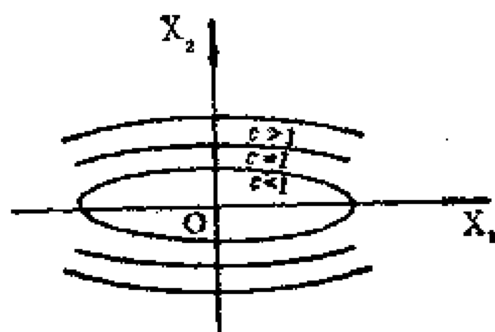


图7—18

3. 函数 $V(x_1,\cdots x_n)$ 关于系统（4.1）对时间t的全导数 $\frac{dV}{dt}$。这个导数是基于下列假定作出的，即x_1，x_2，$\cdots$，x_n是t的函数，且满足系统(4.1)，在此假定下，我们有

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1, \cdots x_n) \qquad (5.5)$$

可见$\frac{dV}{dt}$也是x_1，$\cdots$，x_n的函数，且当$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$时变为零。

结合定正函数$V(x_1, x_2)$的几何解释，在相平面上，当$\frac{dV}{dt}<0$时，系统$\frac{dX}{dt}=F(X)$的轨线与曲线$V=c$相交走向是按函数V的递减方向，即轨线自外向内地进入曲线族（5.4）而渐近于原点(0,0)；而当$\frac{dV}{dt}>0$时，是按函数V的递增方向，即轨线自内向外的走出曲线族（5.4），而远离于原点(0, 0)。

§6 判别稳定性的几个定理

对于自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{o})=0, \tag{6.1}$$

下面建立判别其零解稳定性的几个定理。这里恒假定系统(6.1)的始值问题，在$t\geqslant t_0$($t_0\geqslant 0$)上的解存在唯一并关于初值是连续依赖的。

定理7.1 如果对于系统（6.1），可以找到一个定号函数$V(x_1,\ \cdots x_n)$，它关于系统（6.1）对时间的全导数$\frac{dV}{dt}$是常号函数，但其符号与V相反或恒等于零，则系统（6.1）的零解是稳定的。

证明 我们不妨假设V是正定函数，因而存在$\rho>0$，V在区域。

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho \tag{6.2}$$

上是定正的，而$\frac{dV}{dt}$在此区域上是常负的或恒等于零。

任给$\varepsilon>0(\varepsilon<\rho)$，考虑集$\{\boldsymbol{X}\mid_{\|X\|=\varepsilon}\}$，记

$$m=\inf_{\|X\|=\varepsilon}V(\boldsymbol{X}),$$

由于$V(\boldsymbol{X})$是定正的，必有$m>0$，又因$V(\boldsymbol{X})$在（6.2）上是连续的，且$V(\boldsymbol{o})=0$，所以，对于$m>0$,存在$\delta>0(\delta<\varepsilon)$，当$\|\boldsymbol{X}\|<\delta$时，有

$$V(\boldsymbol{X})<m.$$

根据定义 1，只需证明，当$\|\boldsymbol{X}^0\|<\delta(\boldsymbol{X}^0=\boldsymbol{X}(t_0))$时，在$t\geqslant t_0$上的解$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)$必满足

$$\|\boldsymbol{X}(t,t_0\boldsymbol{X}^0)\|<\varepsilon \tag{6.3}$$

即可.若(6.3)不成立,即存在$\overline{\boldsymbol{X}}^0$，$\|\overline{\boldsymbol{X}}^0\|<\delta<\varepsilon(\overline{\boldsymbol{X}}^0=\overline{\boldsymbol{X}}(t_0))$,

对于$t\geq t_0$上的解$\overline{\mathbf{X}}(t,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0)$，存在$T>t_0$，使得

$$\|\overline{\mathbf{X}}(t,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0)\|<\varepsilon, \qquad (t_0<t<T)$$

而

$$\|\overline{\mathbf{X}}(T,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0)\|=\varepsilon.$$

由所设知$\dfrac{dV}{dt}$是常负或恒为零，从而 $V(\mathbf{X})$ 沿解$\overline{\mathbf{X}}(t,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0)$的轨线是不增的，故

$$V(\overline{\mathbf{X}}(T,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0))\leqslant V(\overline{\mathbf{X}}(t_0,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0))=V(\overline{\mathbf{X}}^0).$$

由于$\|\overline{\mathbf{X}}^0\|<\delta<\varepsilon$，所以

$$V(\overline{\mathbf{X}}(t_0,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0))=V(\overline{\mathbf{X}}^0)<m \tag{6.4}$$

另一方面，由$m=\inf\limits_{\|\mathbf{X}\|=\varepsilon}V(\mathbf{X})$以及$\|\overline{\mathbf{X}}(T,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0)\|=\varepsilon$知

$$V(\overline{\mathbf{X}}(T,t_0,\overline{\mathbf{X}}^0))\geqslant m$$

与(6.4) 式矛盾，从而(6.3) 式成立。所以系统(6.1) 的零解是稳定的。

本定理的几何解释较简单，设$n=2$，$V(x_1,x_2)$是定正函数。则$\dfrac{dV}{dt}\leqslant 0$，由前可知

$$V(x_1,x_2)=c \tag{6.5}$$

（其中c是足够小的正参数）是包围坐标原点并在$c=0$时收缩为原点的封闭曲线，且对足够小的正数c_1，c_2，当$c_1<c_2$时，曲线$V=c_1$完全包围在曲线$V=c_2$内（注意假定$V=c$是由连通的一支组成的）。

考虑系统(6.1) 任一轨线，它在初始时刻由坐标原点附近的某一点出发，这条轨线在t增长时，无论什么时刻都不由里向外

地与任一曲线(6.5) 相交。如果在某一点发生了这样的相交，那么在这一点函数$V(x_1(t),x_2(t))$必然具有正的导数。因为在任一曲线(6.5) 过渡到另一曲线且后者包围前者的时候，函数$V(x_1,x_2)$是增加的，因此，如果任一解的轨线在初始时刻是在某一曲线(6.5) 之内，那末在以后所有时刻，它也应在该曲线之内。当c足够小时，曲线(6.5) 包含着无论多小的坐标原点的邻域，由此就得出了系统(6.1) 的零解的稳定性。

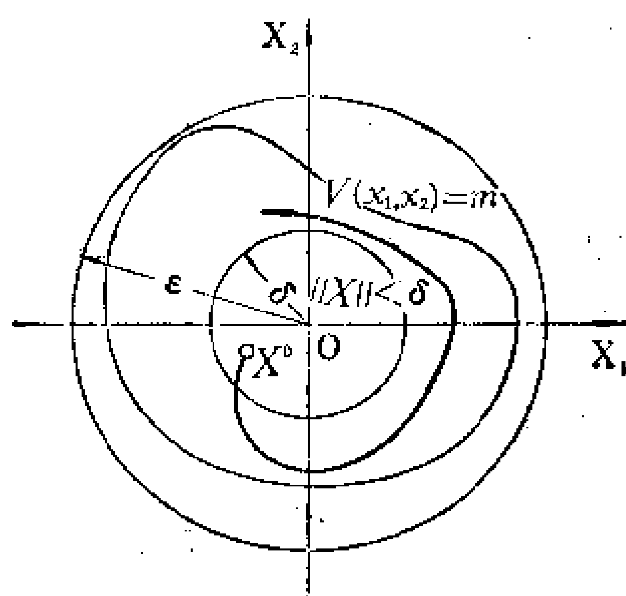


图7—19

同样也可简单地解释如何根据ε来确定$\delta(\varepsilon)$ (图7—19)。为此我们考虑半径为ε的圆内曲线族(6.5)中的“最大”曲线，设这曲线是$V=m$，再作半径为$\delta>0$的圆，使它完全落在$V=m$内，于是任何由圆$\|\mathbf{X}\|<\delta$内起始的轨线，也就是$\|\mathbf{X}^0\|<\delta$的轨线，将永远在$V=m$之内，因而也就在半径为ε的圆内，从而有$\|\mathbf{X}(t,t_0,\mathbf{X}^0)\|<\varepsilon$，即上述$\delta$就是解的稳定性定义中所需要的。事实上，从点$\mathbf{X}^0$($\|\mathbf{X}^0\|<\delta$) 出发的系统的轨线，由于沿着它、$\dfrac{dV(\mathbf{X})}{dt}$

常负，于是，对于$t \geqslant t_0$，有

$$V(\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{X}^0)) \leqslant V(\boldsymbol{X}(t_0, t_0, \boldsymbol{X}^0)) = V(\boldsymbol{X}^0) < m.$$

可见轨线完全停留在$V = m$内部，自然也都位于$\|\boldsymbol{X}\| < \varepsilon$内部。

从几何的观点来看，研究稳定性的李雅普诺夫的直接方法，可归结为建立一族封闭曲面(或曲线)，它们包围坐标原点，并具有性质：轨线只能由外向里地与这样的曲面（曲线）相交。不论用何种方法，只要确立了这种曲面（曲线）族的存在，也就确定了系统零解的稳定性。

定理7.2 如果对于系统（6.1），可以找到一个定号函数$V(x_1, \cdots x_n)$，它关于系统（6.1）对t的全导数$\frac{dV}{dt}$也是定号函数，但符号与V相反，则系统(6.1)的零解是渐近稳定的。

证明 设在域

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho \tag{6.2}$$

上，$V(x_1, \cdots x_n)$是定正的，而$\frac{dV}{dt}$在(6.2) 上是定负的。

根据定理7.1可知，系统（6.1）的零解是稳定的。按照定义2，只需证明，存在$\sigma > 0$，当$\|\boldsymbol{X}^0\| < \sigma$时，在$t \geqslant t_0$上的解$\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{X}^0)$满足

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{X}^0)\| = 0. \tag{6.6}$$

由于系统(6.1) 的零解是稳定的，对任给$\varepsilon > 0$，存在$\sigma > 0$，(σ取定理1中的δ)，有

$$\|\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{X}^0)\| < \varepsilon.$$

$\frac{dV}{dt}$是负定的，从而t增加时$V(\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{X}^0))$是单调递减，且

$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant 0$，所以 $t\to\infty$时，$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))$有极限存在、即

$$\lim_{t\to 0}V(\boldsymbol{X}(t,t_0\ \boldsymbol{X}^0))=l,$$

且$l\geqslant 0$。

下面我们来证明$l=0$。

若$l>0$，则$t\geqslant t_0$时，$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant l$，根据§5性质1°知，存在$\eta>0$，使得对于$t\geqslant t_0$，有

$$\|\boldsymbol{X}(t,t_0\ \boldsymbol{X}^0)\|\geqslant\eta>0,$$

据$\frac{dV}{dt}$是定负的，从而$-\frac{dV}{dt}$是定正的，对$-\frac{dV(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))}{dt}$。根据性质2°知，存在$m>0$，使得

$$-\frac{dV(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))}{dt}\geqslant m$$

或

$$\frac{dV(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))}{dt}\leqslant -m \qquad (t\geqslant t_0)$$

积分得

$$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))-V(\boldsymbol{X}(t_0,t_0,\boldsymbol{X}^0))$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(\boldsymbol{X}(\tau,t_0\boldsymbol{X}^0))}{d\tau}d\tau$$

$$\leqslant-\int_{t_0}^{t}m d\tau=-m(t-t_0)$$

或 $\quad V(\boldsymbol{X}(t,t_0\boldsymbol{X}^0))\leqslant V(\boldsymbol{X}^0)-m(t-t_0)$

对足够大的t，将有$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))<0$，这便与$V(\boldsymbol{X})$是定正的相违背，所以$l=0$，即

$$\lim_{t\to\infty}V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))=0。\qquad (6.7)$$

现在，利用$V(\boldsymbol{X})$的定正性可立即推得(6.6)式成立。因为，若(6.6)式不成立，则必存在 $r>0$及数列$0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$ ($t_k\to\infty$ 当$k\to\infty$时)，使得

$$\varepsilon>\|\boldsymbol{X}(t_k,t_0,\boldsymbol{X}^0)\|\geqslant r.$$

因$V(\boldsymbol{X})$在(6.2)上是定正的，据§5性质2°，便知存在 $h>0$，使得

$$V(\boldsymbol{X}(t_k,t_0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant h.$$

而此式与(6.7)式相矛盾，所以(6.6)式成立，即系统的零解是渐近稳定的。

定理7.3 若对于系统(6.1)，可以找到一个函数 $V(x_1\cdots,x_n)$，它关于系统(6.1)对时间t的全导数$\frac{dV}{dt}$是定号函数，且在坐标原点的任一邻域总存在这样的点，在此点上$V(x_1,\cdots,x_n)$的符号与$\frac{dV}{dt}$相同，则系统(6.1)的零解是不稳定的。

证明 设$\frac{dV}{dt}$在

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho$$

上是定正的，则对于任给$\varepsilon>0(\varepsilon<\rho)$，无论$\delta>0$多么小，按定理假设，总有$\boldsymbol{X}^0=\boldsymbol{X}(t_0)$，$\|\boldsymbol{X}^0\|<\delta$且$V(\boldsymbol{X}^0)>0$，今证对于系统(6.1)在$t\geqslant t_0$上的解$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)$必存在$T>t_0$，使得

$$\|\boldsymbol{X}(T,t_0,\boldsymbol{X}^0)\|>\varepsilon. \tag{6.8}$$

即是从点$\boldsymbol{X}^0$出发的系统(6.1)的轨线当t从t_0增加到T时，开始越出球域$\|\boldsymbol{X}\|<\varepsilon$，而不能完全停留在此域的内部。于是，系统的零解是不稳定的。

用反证法。若不存在$T>t_0$，使(6.8)式成立，就是说对于$t\geqslant t_0$，有

$$\|\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)\|\leqslant\varepsilon. \tag{6.9}$$

由于$\frac{dV}{dt}$是定正的，那么沿着解$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)$，$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))$是单调递增的，因而对于$t\geqslant t_0$，有

$$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant V(\boldsymbol{X}(t_0,t_0,\boldsymbol{X}^0))=V(\boldsymbol{X}^0)>0.$$

据§5性质1°，存在$\eta>0$，使得

$$\|\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0)\|\geqslant\eta>0,\quad (t\geqslant t_0). \tag{6.10}$$

由(6.9)与(6.10)以及$\frac{dV}{dt}$是定正的，又由§5性质2°知，存在$m>0$，使得

$$\frac{dV(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))}{dt}\geqslant m,\quad (t\geqslant t_0)$$

因此

$$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))-V(\boldsymbol{X}(t_0,t_0,\boldsymbol{X}^0))$$
$$=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(\boldsymbol{X}(\tau,t_0,\boldsymbol{X}^0))}{d\tau}d\tau\geqslant\int_{t_0}^{t}md\tau=m(t-t_0).$$

即

$$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant V(\boldsymbol{X}^0)+m(t-t_0). \tag{6.11}$$

此时，当$t\to\infty$时，(6.11)式的右端趋于∞，这便与$V(\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{X}^0))$的有界性相矛盾。所以必存在$T>t_0$，使(6.8)式成立，即系统的零解是不稳定的。

定理7.4 如果对于系统(6.1)，存在函数$V(x_1,\cdots x_n)$使得当$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho$时，

$$\frac{dV}{dt}\geqslant\lambda V.$$

其中 λ 是正的常数，并且V 在坐标原点的任一邻域中总能取到正值，那么系统(6.1)的零解是不稳定的。

证明　对于任何$\delta>0$，取$\boldsymbol{X}^0$，使得$\|\boldsymbol{X}^0\|<\delta$且

$$V(\boldsymbol{X}^0)>0,$$

我们可以证明系统 (6.1) 的解 $X(t,0,\boldsymbol{X}^0)$ 的轨线不能永远停留在区域$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant\rho$中，否则，由假设知

$$\frac{dV(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))}{dt}\geqslant\lambda V(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0)),$$

从而有

$$e^{-\lambda t}\left(\frac{dV(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))}{dt}-\lambda V(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))\right)\geqslant 0$$

即

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda t}V(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))\right]\geqslant 0,$$

将上式从$0\to t$积分，得

$$e^{-\lambda t}V(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))-V(\boldsymbol{X}(0,0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant 0,$$

$$V(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))\geqslant V(\boldsymbol{X}^0)e^{\lambda t}.$$

上式右端当 $t\to\infty$时，趋向无穷，这与 $\|\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0)\|\leqslant\rho$ 时$V(\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{X}^0))$有界相矛盾。所以系统的零解是不稳定的。

例1　讨论系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2),\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2).\end{cases}$$

的零解的稳定性。

解　取$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，它是定正函数，又

$$\frac{dV}{dt}=2x_1\frac{dx_1}{dt}+2x_2\frac{dx_2}{dt}$$

$$=2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)]$$

$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2.$$

它是定负的，据定理7.2知，系统的零解是渐近稳定的。

例2 讨论系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + ax_1^3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + ax_2^3. \end{cases}$$

零解的稳定性，其中 a 是常数。

解 取$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$，它是定正的，又

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt}$$

$$= 2x_1(x_2 + ax_1^3) + 2x_2(-x_1 + ax_2^3)$$

$$= 2a(x_1^4 + x_2^4).$$

于是

当$a<0$时，$\dfrac{dV}{dt}$是定负的，零解是渐近稳定的；

当$a=0$时，$\dfrac{dV}{dt}$恒为0，零解是稳定的；

当$a>0$时，$\dfrac{dV}{dt}$是定正的，零解是不稳定的。

例3 讨论系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_2 - 2x_1^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 5x_2^3, \end{cases}$$

的零解的稳定性。

解 取$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ (a, b待定)，又

$$\frac{dV}{dt} = 2ax_1\frac{dx_1}{dt} + 2bx_2\frac{dx_2}{dt}$$
$$= 2ax_1(5x_2 - 2x_1^3) + 2bx_2(-3x_1 - 5x_2^3)$$
$$= -2[(3b - 5a)x_1x_2 + 2ax_1^4 + 5bx_2^4].$$

如果选取$a = 3$，$b = 5$，则$3b - 5a = 0$，$V(x_1, x_2)$是定正的．而$\frac{dV}{dt}$是定负的．从而系统的零解是渐近稳定的．

例 4 讨论系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = -ax_2 + x_1\\ \dfrac{dx_2}{dt} = bx_1 + x_2,\end{cases}$$

($a>0$，$b>0$)零解的稳定性．

解 取$V(x_1, x_2) = bx_1^2 + ax_2^2$，又

$$\frac{dV}{dt} = 2bx_1(-ax_2 + x_1) + 2ax_2(bx_1 + x_2)$$
$$= 2(bx_1^2 + ax_2^2) = 2V(x_1, x_2),$$

而V在坐标原点的任一邻域总取正值，据定理7.4，系统的零解是不稳定的．

例 5 考虑二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = 0,$$

其中$g(x)$可微，方程描述了单位质点在弹簧力$-g(x)$的作用下的运动，并且假设是通过原点直线地作用的，于是$g(0) = 0$，$xg(x) > 0$ ($x \neq 0$)．试讨论运动在原点的稳定性．

解 记$x_1 = x$，$x_2 = \frac{dx}{dt}$，将二阶方程零解稳定性化为等价系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\
\dfrac{dx_2}{dt} = -g(x_1),
\end{cases}
$$

的零解的稳定性，令

$$G(x_1) = \int_0^x g(\tau)d\tau,$$

从而$x_1 \neq 0$时，$G(x_1) > 0$，而$x_1 = 0$时，$G(x_1) = 0$。

取$V(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}x_2^2 + G(x_1)$，它是定正的，又

$$\frac{dV}{dt} = g(x_1)\frac{dx_1}{dt} + x_2\frac{dx_2}{dt} = x_2 g(x_1) - x_2 g(x_1) = 0,$$

据定理7.1,系统的零解是稳定的。

对于常系数线性系统

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \tag{6.12}$$

的零解$\mathbf{X} = 0$的稳定性，由第六章 §5可得以下结论：

1. 如果矩阵A的所有特征值都具有负实部，那么系统(6.12)的零解是渐近稳定的。

2. 如果矩阵A的特征值中，有一个的实部大于零，或者有一个具有重初等因子的实部为零的特征值，那么系统(6.12)的零解是不稳定的。

3. 如果矩阵A的所有特征值的实部都不大于零，并且实部等于零的特征值都是具有单重初等因子的，那么系统(6.12)的零解是稳定的。

对于非线性系统

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n),\qquad f_i(0,\cdots,0)=0,$$

$$(i=1,2,\cdots n)\qquad (6.13)$$

的零解的稳定性问题，在 $f_i(x_1,\cdots,x_n)$满足一定条件之下，我们也可讨论非线性系统的一次近似系统，略述如下：

设$f_i(x_1,\cdots x_n)$是在含有坐标原点的某区域G内有连续二阶偏导数的函数，从而$f_i(x_1,\cdots x_n)$在坐标原点某邻域可展开为

$$f_i(x_1,\cdots x_n)=\sum_{l=1}^{n}a_{il}x_l+\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\theta_i,x)}{\partial x_l\partial x_m}x_l\cdot x_m,$$

$$(i=1,2,\cdots n),$$

其中$a_{il}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right|_{x=0}$，$0<\theta_i<1$。因此系统(6.13)可写成

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}x_l+\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\theta_i,x)}{\partial x_l\partial x_m}x_l\cdot x_m,\qquad (6.13)'$$

$$(i=1,2,\cdots n).$$

我们称线性系统

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}x_l,\quad i=1,2,\cdots,n\qquad (6.14)$$

为(6.12)的一次近似系统，(6.14)是(6.13)′中丢掉右端关于x_k的二次项得到的，这种作法我们称为线性化。

系统(6.13)零解的稳定性质，在一定条件下，由它的一次近似系统决定，这里从略。可以指出一个容易判明的条件，就是当系统(6.13) 的非线性项是诸x_i的多项式，且其最低次数为二次项时，情况总是如此。

例6 讨论$\frac{dx}{dt}=ax+bx^3$的零解的稳定性，其中a，b为常数。

解 一次近似方程为$\frac{dx}{dt}=ax$，其特征值为a，因此

当$a<0$时，原方程的零解是渐近稳定的，

当$a>0$时，原方程的零解是不稳定的。

例7 讨论系统

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-y+z+xyz,\\ \frac{dy}{dt}=x-2y+2z+z^2,\\ \frac{dz}{dt}=x+2y+z+xz,\end{cases}$$

的零解$x=0$，$y=0$，$z=0$的稳定性。

解 系统的一次近似系统为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-y+z,\\ \frac{dy}{dt}=x-2y+2z,\\ \frac{dz}{dt}=x+2y+z.\end{cases}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-9),$$

令

$$\varphi(\lambda)=-(\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-9),$$

由$\varphi(0)=9>0$，而$\varphi(3)=-9<0$，所以特征方程有正根。系统的零解是不稳定的。

习　题

1. 求下列系统的平衡点：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta xy - \mu \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \end{cases}$ （$\beta \neq 0$，$\beta\mu$，γ为常数）；

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin x - 1. \end{cases}$

2. 试求下列系统的奇点，并判明奇点的类型：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -9x + y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y(1 + y - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(2 + x); \end{cases}$

(5) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\dfrac{dx}{dt} + x = 0$ （$\varepsilon > 0$）。

3. 试讨论线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by,\\ \dfrac{dy}{dt}=cy.\end{cases}$$

的奇点类型，其中a，b，c为常数且a，c不为0。

4. 试画出下列各个系统的相图。

(1) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-5y;\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-6y;\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=5x-3y.\end{cases}$$

5. 试用$\varepsilon-\delta$语言叙述系统

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\ \cdots x_n)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

的解$x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n)$ 是不稳定的定义。

根据定义讨论下列系统解的稳定性。

6. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+3x-y=0,\\ \dfrac{dy}{dt}-8x+y=0;\\ x(0)=1,\\ y(0)=4.\end{cases}$$

7. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-18x-9y;\\ x(0)=1,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

8. 试判别下列函数的定号性。

(1) $V(x,y)=x^2$;

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$;

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+x^4+y^4$;

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$;

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin x$;

(6) $V(x,y)=x+y+x^2$;

(7) $V(x,y,z)=2x^2-4xy+3y^2+2yz+9z^2$.

用李雅普诺夫直接方法判定下列系统零解的稳定性。

9. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-xy^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=-yx^2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+xy^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x^2y-y^3.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+2y^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2xy^2.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^3-2y^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\dfrac{1}{2}y^3.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-xy^6,\\ \dfrac{dy}{dt}=x^4y^3.\end{cases}$

14. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+y-z+3x(6x^2+5y^2+2z^2),\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y+z+5y(6x^2+5y^4+2z^2),\\ \dfrac{dz}{dt}=2x-y-2z+2z(6x^2+5y^2+2z^2).\end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3z - x(y - 2z)^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3z - y(x + z)^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y - z. \end{cases}$

16. 确定系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + (x-1)^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 1 + y^3. \end{cases}$$

的平衡位置，并讨论其稳定性。

17. 讨论系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + z - 1 + (x-1)[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2], \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2z - 5 + y[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2], \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y + z - 3 + (z-2)[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2]. \end{cases}$$

的解$x=1$，$y=0$，$z=2$的稳定性.

18. 试用李雅普诺夫直接方法讨论方程 $x''' + x'' - 2x = 0$ 的零解的稳定性。

19. 试求系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2x^3. \end{cases}$$

的一个首次积分，并讨论它的零解的稳定性。

20. 假设系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad (*)$$

的系数矩阵的特征值都具有负的实数部分.试找一个二次型$V(x,y)$,使其按系统(*)对t的全微商$\frac{dV}{dt}=-(x^2+y^2)$，并以V的性质，讨论系统零解的稳定性。

21. 系统

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

(其中a_{ij}均为常数）的零解为稳定而非渐近稳定的充要条件是什么?

22. 证明$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{1+t}+x^2$的一次近似方程$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{1+t}$的零解是渐近稳定的，但原方程的零解是不稳定的。

23. 试证明齐次变系数线性方程的零解为稳定的充要条件是：它的一切解在$[t_0,\ \infty]$上为有界。

第八章　一阶偏微分方程

§1　基本概念

如果微分方程中的未知函数是多个自变量的函数，那么就称这个方程为偏微分方程，这一章中我们只介绍一阶偏微分方程的有关概念。一阶偏微分方程的一般形状可写成

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,\ x_n,\ u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \qquad (1.1)$$

或者写成就某一个偏导数解出的情形

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad (1.2)$$

其中x_1，x_2，…，x_n是自变量，u是未知函数。

对于定义在$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$空间的某一区域上的连续可微函数$u=U(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，若把它代入方程(1.1)得到关于$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的恒等式

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,U,\ \frac{\partial U}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial U}{\partial x_n}\right)=0,$$

则称函数$u=U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(1.1)的解。它的几何意义，可看作是$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u)$空间的一个曲面。

在三维的情形，用x和y表示自变量u为未知函数，常记$\frac{\partial u}{\partial x}=p$，$\frac{\partial u}{\partial y}=q$，这时一阶方程就写成

$$F(x,y,u,p,q)=0.$$

于是解$u=U(x,y)$的几何意义就是(x,y,u)空间的一个曲面，通常称这个曲面为积分曲面。它是定义在(x,y)平面中某一区域上的函数。

例1 求一阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y$$

的解。

解 显然，它的解是

$$u=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y),$$

其中$\varphi(y)$是y的任意连续可微函数。

例2 求一阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的解。

解 作变换

$$x=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\quad y=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

对η积分，得$u=\varphi(\xi)$。这里φ是变量ξ的任意连续可微函数，所以

$$u=\varphi(x+y)$$

就是方程的解。

我们知道，一阶常微分方程的通解含有一个任意常数，这里

从一些特殊的例子，似乎可以看出，一阶偏微分方程的通解依赖于一个任意函数。为了明确起见，我们依照常微分方程的提法，给出一阶偏微分方程的始值问题如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2},\ \cdots,\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right) & (1.3)\\ u\,|_{x_1=x_1^0}=\varphi(x_2,x_3,\cdots,x_n). & (1.4)\end{cases}$$

其中φ是x_2，x_3，$\cdots$，x_n的已知函数。利用常微分方程组的知识可以证明定解问题(1.3)、(1.4) 的解是存在的，而且这个特解自然决定于始值函数φ。如果给出函数φ以各种可能的形状，我们便得到原方程依赖于任意函数φ的一切特解之集合。在这个意义下，我们说一阶偏微分方程的通解依赖于一个任意函数。就整个偏微分方程来讲，这也是一阶偏微分方程的一个特点。

下面我们将要研究的一阶偏微分方程是

$$A_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots$$
$$+A_n(x_1,x_2,\cdots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,u), \qquad (1.5)$$

其中A_1，A_2，$\cdots$，A_n，f都是已知的函数。由于它关于未知函数的微商是线性的，所以我们称它为一阶拟线性偏微分方程。当系数$A_i(i=1,2,\cdots,n)$中都不含有未知函数u时，方程(1.5) 就变为

$$A_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots$$
$$+A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,u), \qquad (1.6)$$

这时我们称它为半线性方程；当函数f关于u也是线性的，则称它

为线性方程；当$f=0$时，则称它为一阶线性齐次偏微分方程。

对于偏微分方程(1.6)，我们写出对应的常微分方程组为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=A_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\
\dfrac{dx_2}{dt}=A_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\
\cdots\cdots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=A_n(x_1,x_2,\cdots x_n);
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

或把它写成对称的形状：

$$
\frac{dx_1}{A_1}=\frac{dx_2}{A_2}=\cdots=\frac{dx_n}{A_n}. \tag{1.8}
$$

我们称方程组(1.7)（或(1.8)）为偏微分方程(1.6)的特征方程。方程(1.6)的求解问题与它的特征方程有着密切的关系，方程组(1.7)的每一个解$x_i=x_i(t)$ $(i=1, 2, \cdots n)$，在$(x_1, x_2, \cdots x_n)$空间中表示一条曲线，我们称这条曲线为方程(1.6)的特征线；沿着特征线可将偏微分方程化成常微分方程。事实上，设$u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是方程(1.6)的解，则有

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\\
&=A_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\\
&=f(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t);\ u).
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

我们常称方程(1.9)的解为偏微分方程(1.6)的全特征，显然它由常微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = A_1(x_1, x_2, \cdots x_n), \\
\dfrac{dx_2}{dt} = A_2(x_1, x_2, \cdots x_n), \\
\cdots\cdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = A_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\
\dfrac{du}{dt} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

决定，全特征线在$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$空间的投影就是特征线。

常微分方程组(1.10) 的积分曲线完全位于偏微分方程(1.6)的积分曲面上，即全特征线一定落在积分曲面上，而且我们可以用全特征线构造偏微分方程的积分曲面。关于这个事实，在后面还要作进一步讨论。

在一阶偏微分方程的讨论中，特征概念起着很重要的作用。正是由于这个概念，把对一阶偏微分方程的积分问题，化成了对一个常微分方程组的积分问题。从而使常微分方程组的初积分对求解一阶偏微分方程也起到了特殊的作用。由于一阶偏微分方程和常微分方程之间有着密切的关系，所以，通常在常微分方程教科书中总要讲一点一阶偏微分方程的理论。

例3 求一阶偏微分方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的通解。

解 它的特征方程组可写为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x,$$

解出特征为$x^2 + y^2 = c_1$，在此特征线上，偏微分方程可化为常微

分方程

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0。$$

解之，得$u=c_2$。这里任意常数c_1与c_2之间应存在一定的关系，我们用任意函数φ表示之

$$c_2=\varphi(c_1)。$$

因此得到

$$u=\varphi(x^2+y^2)$$

这就是方程的通解。

§2　线性齐次偏微分方程

线性齐次偏微分方程的一般形状为

$$A_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots$$

$$+A_n(x_1,x_2,\cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{2.1}$$

假定系数A_1，A_2，…，A_n是自变量x_1，x_2，…，x_n的已知函数，它们在(x_1，x_2，…，x_n)空间的某个区域内是连续可微的，并且不同时为零。

偏微分方程(2.1)对应的特征方程可写成

$$\frac{dx_1}{A_1}=\frac{dx_2}{A_2}=\cdots=\frac{dx_n}{A_n}。 \tag{2.2}$$

根据第六章中建立的初积分概念及特征的定义，可以看出，偏微分方程(2.1) 的解与特征方程(2.2)的初积分密切相关。并由定理6.1可知，要求线性齐次偏微分方程(2.1)的解，只要求得常微分

方程组(2.2)的一个初积分就行了。

例1 求偏微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

的解。

解 对应的特征方程是

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z},$$

可求出初积分 $\varphi_1=x\sqrt{y}=c_1$，$\varphi_2=xz=c_2$，所以函数

$$u_1=x\sqrt{y},\ u_2=xz$$

都是方程的解。

我们知道，若$\varphi_i=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程组（2.2）的初积分，那么对于任意连续可微函数Φ，显然$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\ \varphi_{n-1})=c$也是方程组(2.2)的初积分，因而$u=\Phi(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{n-1})$也是方程(2.1）的解。

定理8.1 若$\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)=c_i$ $(i=1,2,\ \cdots,n-1)$ 是方程组(2.2）的$n-1$个互相独立的初积分，则函数

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}) \tag{2.3}$$

就是方程(2.1）的通解。其中Φ是其变元的任意连续可微函数。

证明 设$u=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(2.1）的任一解，我们只要证明存在着函数$\Phi$，使得

$$\psi=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$$

成立即可。

由于函数ψ和φ_1，φ_2，$\cdots$，φ_{n-1}都是方程(2.1）的解，所以，有

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} A_i \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} A_i \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} = 0, \\
\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} A_i \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_i} = 0.
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

我们把方程组(2.4) 看作是对函数A_1，A_2，…，A_n的线性方程组．由于$A_i(i=1,2,\cdots n)$在讨论的区域上不同时为零，所以方程组(2.4) 的雅可比行列式

$$\frac{D(\psi,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_{n-1})}{D(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)}=0. \tag{2.5}$$

由于(2.5) 式恒等于零，所以在函数ψ，φ_1，$\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$之间存在着关系

$$F(\psi,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})=0, \tag{2.6}$$

已知 $\varphi_i=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是相互独立的，所以行列式(2.5) 的$n-1$阶子式

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots x_{\alpha_{n-1}})}$$

中至少有一个不等于零．因此，由关系式 (2.6) 可得出

$$\psi=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}).$$

例2 求偏微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

的通解．

解 对应的特征方程是

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

设$x\neq 0$，于是可求出两个互相独立的初积分为

$$\frac{y}{x}=c_1,\qquad \frac{z}{x}=c_2.$$

所以方程的通解可写为

$$u=\Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right).$$

这里Φ是关于$\frac{y}{x}$，$\frac{z}{x}$的任意连续可微函数。

例3 求偏微分方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的通解。

解 这是我们在§1讨论过的例题，对于特征方程

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x},$$

$\varphi=x^2+y^2=c$就是它的一个初积分，由公式（2.3），方程的通解表达式可写成

$$u=\Phi(\varphi)=\Phi(x^2+y^2),$$

其中 Φ 是任意连续可微函数．方程的一切特解都可通过对函数Φ的不同取法而得到，譬如，

取$\Phi(\varphi)=\varphi$，就得到特解 $u=x^2+y^2$，它的几何图形是一个旋转抛物面．

取$\Phi(\varphi)=\sqrt{R^2-\varphi^2}$，得到特解$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，这是一个球面．

取$\Phi(\varphi)=\sqrt{\varphi}$，得到特解 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，这是一个锥面．这些曲面都是方程的积分曲面。

对于方程（2.1）的始值问题，这里不妨假设方程（2.1）的未知函数是含两个自变量的情形，即

$$P(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2.7}$$

关于方程（2.7）的始值问题是指，在点(x_0, y_0)的某个邻域D内，求方程（2.7）的这样的一个解

$$u=f(x,y),$$

使它满足初始条件

$$u|_{x=x_0}=\psi(y), \tag{2.8}$$

这里$\psi(y)$是已知的连续可微函数。

这个定解问题的几何意义是：在由方程（2.7）确定的所有积分曲面中，找通过由始值条件（2.8）所确定的那条曲线的积分曲面。

下面是它的求解过程。我们知道，方程（2.7）的特征方程为

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}.$$

设它的初积分是$\varphi(x,y)=c$。于是，由公式（2.3），方程（2.7）的通解可写成

$$u=\Phi(\varphi).$$

现在的问题是如何利用始值条件（2.8）将任意函数Φ确定出来。为此，令

$$\Phi(\varphi)|_{x=x_0}=\psi(y), \tag{2.9}$$

若记$\varphi|_{x=x_0}=\bar{\varphi}$，且假定在$D$内由此式可解出

$$y=\omega(\bar{\varphi}),$$

于是（2.9）式可写成

$$\Phi(\bar{\varphi})=\psi(\omega(\bar{\varphi})),$$

这样任意函数Φ就被确定了，所以

$$\Phi(\varphi)=\psi(\omega(\varphi)),$$

从而始值问题的解就是

$$u=\psi(\omega(\varphi)).$$

不难验证，这个解是满足方程和初始条件的。

在前面例 3中，我们选取了几个特解，实际上，它们是分别以 $u|_{x=x_0}=y^2$，$u|_{x=x_0}=\sqrt{R^2-y^2}$ 和$u|_{x=x_0}=y$为初始条件所定出的特解。

例4 求始值问题

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\\ u|_{x=1}=y-z\end{cases}$$

的解。

解 对应的特征方程为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

不难求出它的两个相互独立的初积分是

$$\varphi_1=\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1,$$

$$\varphi_2=\sqrt{x}-\sqrt{z}=c_2$$

于是得到通解

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)$$

记$\varphi_1|_{x=1}=\overline{\varphi_1}=1-\sqrt{y}$，$\varphi_2|_{x=1}=\overline{\varphi_2}=1-\sqrt{z}$。由此解得 $y=(1-\overline{\varphi_1})^2$，$z=(1-\overline{\varphi_2})^2$。再利用初始条件，令

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2)|_{x=1}=y-z,$$

就得到

$$\Phi(\overline{\varphi_1},\ \overline{\varphi_2})=(1-\overline{\varphi_1})^2-(1-\overline{\varphi_2})^2,$$

从而

$$\Phi(\varphi_1,\ \varphi_2)=(1-\varphi_1)^2-(1-\varphi_2)^2.$$

所以始值问题的解为

$$u=(1-\varphi_1)^2-(1-\varphi_2)^2=y-z-2(\sqrt{z}-\sqrt{y})(1-\sqrt{x}).$$

§3 拟线性偏微分方程

拟线性偏微分方程的一般形状是

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,u),\tag{3.1}$$

其中 $A_i(i=1,2,\ \cdots,\ n)$ 和 f 是变元$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u$的已知函数。这里假定函数 $A_i,\ f$在 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u)$ 空间的某个区域D内都是连续可微的，而且A_i不同时等于零。

在上述假设下，方程 (3.1) 的求解方法是把它化成线性齐次偏微分方程。为此，我们把方程(3.1)的解$u=U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成隐式：

$$v(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0.\tag{3.2}$$

这样一来，v就成为我们所要求的未知函数。

此处设函数 v 在区域 D 内对所有变元有连续的偏导数，且$\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$，于是对$x_i$微分等式 (3.2) 有

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}} \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{3.3}$$

利用关系式（3.3），就把方程（3.1）变成：

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + f(x_1,x_2\cdots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \tag{3.4}$$

方程（3.4）是关于函数v的线性齐次方程。但是，需要注意，等式（3.4）并不是关于变元$x_1,x_2,\cdots,x_n,u$的恒等式，它是在假定（3.2）式是方程（3.1）的隐式解这个前提下才成立的，即方程（3.4）只在曲面$v(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$上变为恒等式；因此，方程（3.4）和在上一节讨论过的线性齐次方程还是有所区别的。

我们先用 §2 的方法求出方程（3.4）的通解，且暂时把$x_1,x_2,\cdots,x_n,u$看作是独立的自变量，而v是未知函数；与方程（3.4）对应的特征方程是

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{du}{f}, \tag{3.5}$$

求出方程组（3.5）的n个独立的初积分

$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u) = c_1,$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u) = c_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u) = c_n;$$

则方程（3.4）的通解可写为

$$v = \Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n),$$

这里Φ是任意连续可微函数。

根据关系式（3.2），令

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=0 \tag{3.6}$$

我们就得到拟线性偏微分方程（3.1）的通解。

定理8.2 对于任意的连续可微函数Φ，若

$$v=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$$

是线性齐次方程（3.4）的通解，则

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=0$$

就是拟线性方程（3.1）的通解，其中$\varphi_i(i=1.,2\cdots n)$是特征方程（3.5）的$n$个独立的初积分。

证明 首先证明由关系式（3.6）确定的隐函数$u=U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是方程（3.1）的解。因为函数v满足方程（3.4），根据（3.3）式，只要用$-\frac{\partial v}{\partial u}$（$\neq 0$）除方程（3.4），就得到

$$\sum_{i=1}^{n}A_i[x_1,x_2,\cdots,x_n,U(x_1,\cdots,x_n)]\frac{\partial v}{\partial x_i}$$
$$=f[x_1,x_2,\cdots,x_n,U(x_1,x_2,\cdots,x_n)],$$

所以 $u=U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是拟线性方程(3.1) 的解。

其次证明拟线性方程(3.1)的任何一个解$u=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都可以表成（3.6）的形式。记

$$\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,V(x_1,\cdots x_n))$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

只要能证明 $\psi_i(i=1.2,\cdots,n)$是相关的，就存在某个函数$\bar{\Phi}$，使得

$$\bar{\Phi}[\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,V(x_1,\cdots x_n)),\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,V(x_1,$$

$$\cdots,x_n,))\cdots\varphi_n(x_1\cdots x_n,V(x_1\cdots,x_n))]\equiv 0.$$

事实上，因为

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n)$$

当$u=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是方程（3.1）的解时，有

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+f\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=0$$

同理

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\psi_2}{\partial x_i}=0,\cdots,\quad\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\psi_n}{\partial x_i}=0.$$

于是得到方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}=0,\\ \sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\psi_2}{\partial x_i}=0,\\ \cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\psi_n}{\partial x_i}=0.\end{cases}$$

因为$A_1,A_2,\cdots,A_n$不全为零，所以它们的雅可比行列式

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\equiv 0.$$

从而就证明了ψ_1，ψ_2，…，ψ_n是相关的。

例1　求偏微分方程

$$(1+\sqrt{u-x-y})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2$$

的通解.

解 这是一个拟线性偏微分方程，相应的线性齐次方程(3,4)在这里为

$$(1+\sqrt{u-x-y})\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial u}=0$$

它所对应的特征方程是

$$\frac{dx}{1+\sqrt{u-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{du}{2}$$

不难得到两个独立的初积分是

$$\varphi_1=u-2y=c_1,\quad \varphi_2=y+2\sqrt{u-x-y}=c_2$$

所以原方程的通解可写为

$$\Phi(u-2y,\ y+2\sqrt{u-x-y})=0.$$

其中Φ是任意连续可微函数.

在这个例题中，显然还有解$u=x+y$,而此解不能由上面通解表达式给出，这就说明用公式（3.6）来表示方程(3.1)的通解是在一定条件下讲的. 当$u=x+y$时，系数$1+\sqrt{u-x-y}$的偏导数无界，所以，若不满足前面所提出的假设条件，这时方程(3.1)就可能有不包含在通解表达式(3.6)中的特解. 我们把这样的解叫做特别解.

关于拟线性方程的始值问题，为了简单起见，在这里我们只讨论未知函数具有两个自变量的情形，即所谓拉格朗日方程

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u), \qquad (3.7)$$

它的始值问题是指如下的形式

$$\begin{cases} P\dfrac{\partial u}{\partial x}+Q\dfrac{\partial u}{\partial y}=R, \\ u|_{x=x_0}=\psi(y), \end{cases} \tag{3.8}$$

其中$\psi(y)$是已知的连续可微函数。定解问题（3.7)、(3.8)的几何意义是在(x,y,u)空间找出一个曲面S，使它通过已给的曲线Γ：$x=x_0$，$u=\psi(y)$。它的求解过程，就是把所有与曲线Γ相交的全特征线组成一个积分曲面S。为了说明这个事实，我们先考察全特征线是否一定完全落在曲面S上。

设M是曲面S上的任一点，显然，通过M点有且仅有一条全特征线l。因为方程(3.7)的通解可写为

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=0,$$

其中$\varphi_1(x,y,u)=c_1$，$\varphi_2(x,y,u)=c_2$是方程组

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R} \tag{3.9}$$

的两个独立初积分。今固定点$M=\bar{M}$，则通过$\bar{M}$点的全特征线为$l=\bar{l}$，且$\bar{l}$就是$\varphi_1(x,y,u)=\bar{c}_1$和$\varphi_2(x,y,u)=\bar{c}_2$的交线，这里

$$\bar{c}_1=\varphi_1(\bar{M}),\quad \bar{c}_2=\varphi_2(\bar{M}),$$

从而推得

$$\Phi(\varphi_1(\bar{M}),\ \varphi_2(\bar{M}))=\Phi(\bar{c}_1,\bar{c}_2)=0.$$

于是在整个$\bar{l}$上，有

$$\Phi(\varphi_1(x,y,u),\ \varphi_2(x,y,u))=0.$$

这就正好说明，全特征线$\bar{l}$完全位于曲面S上。

下面再进一步考察由全特征组成的曲面G是否是方程（3.7)的积分曲面。设曲面G是光滑的，它的表达式为

$$u=V(x,y),$$

由(3.9)知，全特征线上每一点M的切向量为

$$(P(x,y,u),\ Q(x,y,u),\ R(x,y,u)),$$

而曲面G在M点法向量为

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ -1\right).$$

因为它们是互相垂直的，所以二者的数量积应等于零，即

$$P\frac{\partial V}{\partial x}+Q\,\frac{\partial V}{\partial y}-R=0.$$

由于点M的任意性，正好说明$u=V(x,y)$是方程(3.7)的一个解。故曲面G是(3.7)的积分曲面。

在上述讨论的基础上，我们给出始值问题(3.7)、(3.8)的具体解法，通常称作特征线法。已知$\varphi_1(x_1,y,u)=c_1$，$\varphi_2(x,y,u)=c_2$是方程组(3.9)的两个独立初积分，对于通解$\Phi(\varphi_1,\ \varphi_2)=0$，我们利用初始条件

$$u|_{x=x_0}=\psi(y)$$

来确定通解中的任意函数Φ。为此，令

$$\varphi_1(x_0,y,\psi(y))=c_1,$$

$$\varphi_2(x_0,y,\psi(y))=c_2,$$

然后消去y，得到参数c_1和c_2的关系式

$$\tilde{\Phi}(c_1,\ c_2)=0.$$

它是(3.8)的积分曲面的所有全特征应满足的条件。于是任意函数Φ就被确定，所以始值问题(3.7)、(3.8)的隐式解可写为

$$\bar{\Phi}(\varphi_1,\varphi_2)=0. \tag{3.10}$$

如果从(3.10)中能解出函数u，我们就得到始值问题的显式解。

例2　求始值问题

$$\begin{cases}(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y,\\ u=0,xy=1\end{cases}$$

的解。

解 由特征方程

$$\frac{dx}{y-u}=\frac{dy}{u-x}=\frac{du}{x-y}$$

求得两个独立的初积分是

$$x+y+u=c_1,\quad x^2+y^2+u^2=c_2.$$

因此，全特征线都是一些圆的曲线。

我们必须选择通过已知曲线 $u=0$，$xy=1$ 的全特征线族。当 $u=0$，$xy=1$时，有

$$c_1^2=x^2+y^2+2xy=c_2+2$$

故所求积分曲面的隐式为

$$(x+y+u)^2=x^2+y^2+u^2+2,$$

或写成显式

$$u=\frac{1-xy}{x+y}.$$

例 3 求始值问题

$$\begin{cases}(1+\sqrt{u-x-y})\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=2,\\ u|_{y=0}=2x\end{cases}$$

的解。

解 由例1知，此方程的两个独立的初积分是

$$u-2y=c_1,\quad y+2\sqrt{u-x-y}=c_2.$$

这里我们选择通过已给曲线$y=0$，$u=2x$的全特征线族，令

$$\varphi_1(x,0,2x)=2x=c_1,$$

$$\varphi_2(x,0,2x)=2\sqrt{x}=c_2,$$

消去x，得

$$c_2=2\sqrt{\frac{c_1}{2}},$$

从而

$$2c_1-c_2^2=0.$$

故所求的隐式解为

$$2u-4y-(y+2\sqrt{u-x-y})^2=0.$$

例 4 求始值问题

$$\begin{cases}x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+3z\dfrac{\partial u}{\partial z}=4u,\\ u|_{y=1}=x+z\end{cases}$$

的解。

解 由特征方程

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{3z}=\frac{du}{4u},$$

求得三个独立初积分是

$$\varphi_1=\frac{x^2}{y}=c_1,\quad \varphi_2=\frac{z^2}{y^3}=c_2,\quad \varphi_3=\frac{u}{y^2}=c_3,$$

于是方程的通解可写为

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=0.$$

为了确定任意函数Φ，令

$$\varphi_1(x,1,z,x+z)=x^2=c_1,$$

$$\varphi_2(x,1,z,x+z)=z^2=c_2,$$

$$\varphi_3(x,1,z,x+z)=x+z=c_3,$$

消去x和z，得

$$\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}=c_3.$$

即

$$\sqrt{\varphi_1}+\sqrt{\varphi_2}=\varphi_3.$$

这样任意函数Φ就被确定为

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=\varphi_3-\sqrt{\varphi_1}-\sqrt{\varphi_2},$$

故所求的隐式解为

$$\frac{u}{y^2}-\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{z}{\sqrt{y^3}}=0.$$

把它写成显式

$$u=xy^{\frac{3}{2}}+zy^{\frac{1}{2}}.$$

§4* 非线性偏微分方程

这里我们只研究未知函数依赖于两个自变量的情形，它的一般形状为

$$F(x,y,u,p,q)=0, \tag{4.1}$$

其中$p=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$。偏微分方程(4.1)的解，就是$(x,y,u)$空间的一个曲面；而$p$、$q$两数则是积分曲面$u=u(x,y)$上的法线方向$\mathbf{N}(p,q,-1)$。

这样一来，方程(4.1)就成为对所求积分曲面上每一点的法线方向的一个限制，这个限制给出p，q二数之间的一个关系式：

$$f(p,q)=0,$$

即在所求积分曲面上的每一点(x,y,u)处，所有可能的法线方向$\mathbf{N}(p,q,-1)$将组成一个锥面。因此，求方程(4.1)的解就可归结为

求这样的曲面，使曲面上每一点的法线都和在这一点之上述法线锥面中的一个方向重合。

关于方程(4.1)的始值问题

$$
\begin{cases}
F(x,y,u,p,q)=0, & (4.1)\\
u(x_0,y)=\varphi(y), & (4.2)
\end{cases}
$$

它的几何意义就是求方程(4.1)的通过已给曲线

$$u(x_0,\ y)=\varphi(y)$$

的积分曲面。这里假设函数 F 在所讨论的区域内有二阶连续的偏导数。

设 $u=u(x,y)$ (4.3)

是方程(4.1)的任一解，于是以$u(x,y)$、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$代替方程中的

u、p、q，然后再就x和y求偏微商，我们得到

$$F_x+F_u p+F_p\frac{\partial p}{\partial x}+F_q\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$F_y+F_u q+F_p\frac{\partial p}{\partial y}+F_q\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

因为$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$，从而有

$$
\begin{cases}
F_x+F_u p+F_p\dfrac{\partial p}{\partial x}+F_q\dfrac{\partial p}{\partial y}=0,\\
F_y+F_u q+F_p\dfrac{\partial q}{\partial x}+F_q\dfrac{\partial q}{\partial y}=0.
\end{cases}
\qquad (4.4)
$$

方程组(4.4)是关于 p，q 的拟线性偏微分方程组，它的特征方程为

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=-\frac{dp}{F_x+F_u p}=-\frac{dq}{F_y+F_u q}=dt. \qquad (4.5)$$

由于

$$du = pdx + qdy,$$

所以沿着特征线，有

$$\frac{du}{F_p p + F_q q} = dt. \tag{4.6}$$

今将(4.6)式补充到(4.5)中去，于是在$u=u(x,y)$是方程 (4.1)的解的假定下，我们得到$x(t)$，$y(t)$，$u(t)$，$\frac{\partial u(t)}{\partial x}$，$\frac{\partial u(t)}{\partial y}$应满足的方程组：

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{F_p p + F_q q} = -\frac{dp}{F_x + F_u p} = -\frac{dq}{F_y + F_u q} = dt \tag{4.7}$$

哥西发现，不需要知道方程(4.1)的解$u=u(x,y)$，可以直接从方程组(4.7)给出特征曲线的定义。事实上，假定$t=0$时，$x=x_0$，$y=y_0$，$u=\varphi(y_0)=u_0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y_0)=q_0$，$p_0$由方程

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q_0) = 0 \tag{4.8}$$

求出。于是由始值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{F_p} = \dfrac{dy}{F_q} = \dfrac{du}{F_p p + F_q q} = -\dfrac{dp}{F_x + F_u p} = -\dfrac{dq}{F_y + F_u q} = dt, & (4.7) \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0, \ u(0) = u_0, \\ p(0) = p_0, \ q(0) = q_0, & (4.9) \end{cases}$$

就完全确定了一条积分曲线。这时(4.7)，(4.9)的解具有下列形式

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ y = \psi_2(t, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ u = \psi_3(t, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ p = \psi_4(t, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ q = \psi_5(t, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0). \end{cases} \tag{4.10}$$

在(x,y,u)空间(4.10) 的几何意义是：

$$x=\psi_1(t,y_0),\ \ y=\psi_2(t,y_0),\ \ u=\psi_3(t,y_0)$$

是特征曲线(即全特征线)，$p=\psi_4(t,y_0)q=\psi_5(t,y_0)$是特征线上每一点处所作平面

$$U-u=p(X-x)+q(Y-y) \tag{4.11}$$

的角系数。此处y_0起着参数的作用。

我们把特征曲线和附属于其上各点的平面(4.11)，合起来称为特征长条。这就明显地告诉了我们，要使方程组(4.7)的解成为方程(4.1)的特征，表达式(4.10)所应含有的内在关系。而且由特征作出积分曲面时，特征曲线上各点的附属平面正好是曲面的切平面。关于方程组(4.7)，我们仍然称它为方程(4.1)的特征方程。

现在证明方程(4.1)的积分曲面确实可由以上定义的特征线所构成。必须注意，函数$F(x,y,u,p,q,)$是特征方程(4.7) 的初积分，事实上，沿着(4.7) 的积分曲线，有

$$\frac{dF}{dt}=F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_u\frac{du}{dt}+F_p\frac{dp}{dt}+F_q\frac{dq}{dt}$$

$$=F_xF_p+F_yF_q+F_u(F_pp+F_qq)-F_p(F_x+F_up)$$

$$-F_q(F_y+F_uq)=0.$$

所以，在特征曲线上，就有

$$F(x,y,u,p,q)=F(x_0,y_0,u_0,p_0,q_0)=0.$$

由此可以看出，当(4.7)的解的初始条件由关系式(4.8)联系着时，则此解必须满足关系

$$F(x,y,u,p,q)=0.$$

我们若记y_0为参变数r，即取初始值(x_0,y_0,u_0,p_0,q_0)为参变数r的函数，当然，这些函数满足关系式(4.8)。这时(4.10) 就

可写成

$$
\begin{cases}
x=\psi_1(t,r), \\
y=\psi_2(t,r), \\
u=\psi_3(t,r), \\
p=\psi_4(t,r), \\
q=\psi_5(t,r).
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

于是

$$x=\psi_1(t,r),\quad y=\psi_2(t,r),\quad u=\psi_3(t,r)$$

就是一个曲面。若固定r就得到一条特征线.虽然在此曲面上的每一点处，当$p=\psi_4(t,r)$、$q=\psi_5(t,r)$时，都有

$$F(x,y,u,p,q)=0;$$

但还必须证明

$$p=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial u}{\partial y},$$

也就是说，是否有

$$du=pdx+qdy$$

或者写成：

$$
\frac{\partial\psi_3}{\partial t}dt+\frac{\partial\psi_3}{\partial r}dr=\psi_4\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}dt+\frac{\partial\psi_1}{\partial r}dr\right)
+\psi_5\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial t}dt+\frac{\partial\psi_2}{\partial r}dr\right).
\tag{4.12}
$$

等式(4.12)等价于以下两个关系式：

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial t}=\psi_4\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\psi_5\frac{\partial\psi_2}{\partial t},\tag{4.13}$$

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial r}=\psi_4\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\psi_5\frac{\partial\psi_2}{\partial r}.\tag{4.14}$$

由方程组（4.7）知，等式（4.13）是成立的。所以只需证明等式

(4.14)。为此，记

$$V=\frac{\partial\psi_3}{\partial r}-\psi_4\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\psi_5\frac{\partial\psi_2}{\partial r},\tag{4.15}$$

只要能证明$V\equiv 0$即可。

将等式(4.15)对t求导，得到

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2\psi_3}{\partial r\partial t}-\psi_4\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r\partial t}-\psi_5\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r\partial t}-\frac{\partial\psi_4}{\partial t}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\frac{\partial\psi_5}{\partial t}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial r},$$

再减去将恒等式(4.13)对r求导的结果：

$$0=\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t\partial r}-\psi_4\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial r}-\psi_5\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t\partial r}-\frac{\partial\psi_4}{\partial r}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-\frac{\partial\psi_5}{\partial r}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial t},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}&=\frac{\partial\psi_4}{\partial r}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{\partial\psi_5}{\partial r}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial t}-\frac{\partial\psi_4}{\partial t}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\frac{\partial\psi_5}{\partial t}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\\&=F_p\frac{\partial\psi_4}{\partial r}+F_q\frac{\partial\psi_5}{\partial r}+F_x\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+F_y\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\\&\quad+F_u\left(p\,\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+q\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right).\end{aligned}$$

又因为把(4.10)′代入(4.1)有

$$F(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5)=0$$

对r求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial r}=F_x\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+F_y\frac{\partial\psi_2}{\partial r}+F_u\frac{\partial\psi_3}{\partial r}+F_p\frac{\partial\psi_4}{\partial r}+F_q\frac{\partial\psi_5}{\partial r}=0;$$

所以有

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}&=-F_u\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial r}-p\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-q\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right)\\&=-F_uV,\end{aligned}\tag{4.16}$$

对方程(4.16)积分，就得到

$$V = V_0 e^{-\int_0^t F_u dt},$$

其中V_0是V在$t=0$时的值．显然，只要$V_0 \equiv 0$，就可推得$V \equiv 0$．根据假设，V_0的关系式是

$$V_0 = \frac{d\psi(r)}{dr} - p_0 \cdot 0 - \varphi'(r) = 0, \tag{4.17}$$

所以

$$V \equiv 0.$$

如果始值问题(4.1),(4.2)的初始条件是以参数形式给出的：

$$x_0 = x_0(s),\quad y_0 = y_0(s),\quad u_0 = u_0(s) \tag{4.18}$$

这时相应于条件(4.17)的是关系式

$$u_0'(s) - p_0(s)x_0'(s) - q_0(s)y_0'(s) = 0,$$

连同等式

$$F(x_0(s),\ y_0(s),\ u_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s)) = 0,$$

确定出函数$p_0 = p_0(s)$和$q_0 = q_0(s)$，然后，对方程组(4.7)以初始条件为：当$t=0$时，

$$x_0 = x_0(s),\quad y_0 = y_0(s),\quad u_0 = u_0(s),\quad p_0 = p_0(s),$$

$$q_0 = q_0(s)$$

提出始值问题；则这个定解问题的积分曲线，就是方程(4.1)的特征线，它的前三个函数

$$x = x(t,s),\qquad y = y(t,s),\qquad u = u(t,s),$$

就是方程(4.1)的积分曲面的参数表达式。

上述哥西提法，可以推广到含n个自变量的非线性偏微分方程中去．这方面的有关论述，可参阅B. B. 史捷班诺夫的《微分方程教程》。

例1 求始值问题

$$\begin{cases} pq-u=0, \\ u|_{x=1}=y^2 \end{cases}$$

的解。

解 首先将初始条件写成参数形式：

$$x_0=1, \quad y_0=s, \quad u_0=s^2.$$

由$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$ 得 $q_0=2s$，再由方程求得 $p_0=\dfrac{s}{2}$，这里与(4.7) 相当的方程组为

$$\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\frac{du}{2pq}=\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}=dt,$$

于是选取定解条件为：当$t=0$时，

$$x_0=1, \quad y_0=s, \quad u_0=s^2, \quad p_0=\frac{s}{2}, \quad q_0=2s.$$

我们就得到与(4.9)相当的定解问题，从而解出

$$x=1+2s(e^t-1),\ y=1+\frac{s}{2}(e^t-1),\ u=s^2e^{2t},$$

$$p=\frac{s}{2}e^t,\ q=2se^t.$$

故

$$\begin{cases} x=1+2s(e^t-1), \\ y=1+\dfrac{s}{2}(e^t-1), \\ u=s^2e^{2t}. \end{cases}$$

就是所求解的参数表达式。

习　题

求下列方程的通解：

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} - xy^2$.

4. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

5. $(x - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. $x(y^2 - z^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y(z^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

7. $xz\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

8. $y\frac{\partial u}{\partial x} + (xy^{\frac{1}{2}} - xy^2)\frac{\partial u}{\partial y} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

9. $(mz - ny)\frac{\partial u}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial u}{\partial y} + (ly - mx)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
(m、n、l是常数)。

10. $z\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

11. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

12. $x\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

13. $\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = xyz$（$b$、$c$是常数）。

求解下列始值问题：

14. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \\ \text{当} x = 1 \text{时}, z = y^2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} (x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \\ z|_{x=0} = 1 + \sqrt{y}. \end{cases}$

16. $\begin{cases}(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\\ u|_{z=0}=y^2.\end{cases}$

17. $\begin{cases}x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z;\\ \text{当}y=1\text{时，}z=3x.\end{cases}$

18. $\begin{cases}yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\\ \text{当}x=0\text{时，}z=y^3.\end{cases}$

19. $\begin{cases}(x^2-yu)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y^2-xu)\dfrac{\partial u}{\partial y}=u^2-xy;\\ u|_{x=0}=2y.\end{cases}$

20. $\begin{cases}x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=hv\ (h\text{是正整数});\\ \text{当}x=1\text{时，}v=e^y.\end{cases}$

21. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=xu$，$u=u(x,y)$过曲线：$x=a$，

$y^2+u^2=a^2$.

22. 求与曲面$v^2=axy$正交的曲面。

23. 证明偏微分方程 $a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$的全特征曲线都是平面曲线。

24. 求解始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=u,\\ u|_{x=0}=y^2,\end{cases}$$

如果把初始条件换成 $u|_{x=0}=e^y$，其结果又怎样？并讨论产生这些现象的原因。

25. 求方程 $xpq+yq^2=1$ 通过曲线 $u=x$，$y=0$ 的积分曲面。

26. 求方程 $xp+yq=pq$的特征，并导出通过曲线$u=\frac{1}{2}x$，$y=0$ 的积分曲面。

习 题 答 案

第 一 章

3．(1) $y'+ky=0$；　(2) $y^2+y'^2=1$；

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2tx}{t^2+x^2}$；　(4) $\dfrac{d^3x}{dt^3}\left[1+\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\right]-3\dfrac{dx}{dt}\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2=0$。

4．1小时。　5．$m\dfrac{dv}{dt}=-(mg+kv)$，$v(0)=v_0$。

6．$y'=\dfrac{y-x}{x}$。

第 二 章

1．$x+\cos t=c$。　2．$\ln|y|-\dfrac{y^2}{2}=x-\operatorname{arctg}x+c$。

3．$y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$。　4．$y=ce^x-x-2$。　5．$(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$。　6．$(x+1)(2-e^y)=c$。　7．$2e^{3x}-3e^{-y^2}=c$。　8．$y^2-x^2=c$，$y=cx$。　9．$xy=c$。　10．$v(t)=-4t+40$，$x(t)=-2t^2+40t$。　11．$y=x+3+c(x+y+1)^3$。　12．$y=c\cos x+\sin x$。　13．$x^2-y^2=cx$。　14．$y=c\left(1+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|\right)$。　15．$x=cy+\dfrac{1}{2}y^3$。　16．$y=\dfrac{2x}{2c-x^2}$。

17．$\ln\left(c_1\sqrt{2x^2+y^2-xy-\dfrac{17}{4}x-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{11}{4}}\right)+\dfrac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2y-x-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{7}\left(x-\dfrac{5}{4}\right)}=0$。　18．$y\left(\dfrac{1}{2}x^2+x+c\right)=1+x$。　19．$x+\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=c$。

20. $x=ce^{y^2-1}$. 21. $y=x+\dfrac{2x}{2ce^{2x-1}-1}$.

22. $x=x^2e^{\frac{1}{3}x^3}\ (xy-1)\left(c+\int\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{3}x^3}dx\right)$. 23. $y=e^{x^2}(c+\sin x)$.

24. $y=ce^{\varphi(x)}+\varphi(x)-1$. 25. $y=x^4(c+\frac{1}{2}\ln|x|)^2$.

26. $\dfrac{1}{x+y}e^{x^2}(c-\int e^{-x^2}dx)$. 27. $y=x^2+\dfrac{5}{3}$. 28. $\dfrac{1}{y-x}$ $=ce^{\frac{1}{2}x^2}-x^2-2$. 29. $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$. 30. $x=cye^{\frac{1}{xy}}$.

31. $\sin(y-x)=ce^{-\frac{1}{2}x^2}$. 34. $x^4-2y^2+4xy=c$. 35. $x^2+y^2-2\text{arctg}\dfrac{x}{y}=c$. 36. $xy+\dfrac{y}{x}=c$. 37. $y\sin x+x\cos y=c$.

38. $x^8+3x^2y^2+y^4=c$. 39. $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$.
40. $x^2+y^2=cy$. 41. $x^2y^3-ax^5=c$.
42. $xe^y-24y=c$. 43. $\rho+\rho e^{2\theta}=c$. 44. $\ln(x^2+y^2)+2y^4=c$.
45. $x^2+y+1=cx$. 46. $y^2-x^2-1=cx$. 47. $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{2}(\ln|x|)^2=c$. 48. $\mu=\dfrac{1}{p(x)n(y)}$. 49. $\mu=\dfrac{1}{xf(x,y)-y}$. 50. 有形如$\mu(x\pm y)$的积分因子的充要条件是$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M\mp N}$仅是$x\pm y$的函数。

51. $(y-c)(y+e^x-c)(y-e^x-c)=0$. 52. $x=\dfrac{c}{p^2}+\dfrac{2}{3}p$, $y=\dfrac{2c}{p}+\dfrac{1}{3}p^2$($p$为参数)。 53. $x=\int\dfrac{e^p}{p}dp+\ln|p|+c$, $y=e^p+p$(p为参数)。 54. $(2y-x^2-c)(y-ce^{-x}+x-1)=0$. 55. $(cx^{-3}-y)(xy-c)=0$. 56. $(y-c)^3-x^3=0$. 57. $(y-c)(\sqrt{y}+x-c)\cdot(\sqrt{y}-x-c)=0$. 58. $x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{1}{2p}$, $y=\dfrac{2c}{p}+\dfrac{1}{2}\ln|p|-1$($p$为

参数)。 59. $x=yp-p^2$, $y=\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}(p\sqrt{1-p^2}-\arcsin p+c)$($p$为参数)。 60. $x=\frac{p}{2}+\frac{1}{2p}$, $y=\frac{p^2}{4}-\frac{1}{2}\ln|p|+c$ (p为参数)。 61. 通解 $y=cx+c-c^2$, 奇解$y=\frac{1}{4}(x+1)^2$。 62. $x=\frac{c}{(1-p)^2}+1$, $y=\frac{cp^2}{(1-p)^2}$(p为参数)。 63. $x=p^3-p+2$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{1}{2}p^2+c$, ($p$为参数) 64. $x=\frac{-2ap}{1+p^2}-2a\,\mathrm{arctg}\,p+c$, $y=\frac{2a}{1+p^2}$(p为参数)。 若令$y'=\mathrm{tg}\varphi$, $x=-2a\varphi-a\sin 2\varphi+c$, $y=2a\cos^2\varphi$ (φ为参数)。 65. $\sqrt{1+x^2+y^2}-\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=c$。 66. $x^3y^2+e^x(x^2-2x+2)=c$。 67. $e^x(y\sin x+x\cos x-\sin x)=c$。 68. $x^3y-\frac{x^2}{y}=c$。 69. $\sin y=c\sin x-c^2$(提示:令$\sin x=u$, $\sin y=v$)。
70. $(y-cx+2c)(y-cx+1)=0$。 71. $y=e^x$, $y=e^{\frac{1}{2}x^2}$。
73. 无奇解。 74. $y=0$。 75. 无奇解。 76. $y=x\arccos x-\sin(\arccos x)$。 77. $y=c$, $y=-c$。 78. 奇解$y=-\frac{1}{4}x^2$, 它过所给定点(2, -1),故定解问题的解无穷多个,写出四个如下:$y=-\frac{1}{4}x^2$,

$y=-x+1$, $y=\begin{cases}-\frac{1}{4}x^2 & x\leqslant 2\\ -x+1 & x>2,\end{cases}$ $y=\begin{cases}-x+1 & x\leqslant 2\\ -\frac{1}{4}x^2 & x>2.\end{cases}$

第 三 章

3. $y_2=xe^{-\frac{1}{x}}$. 4. $y_2=1-x\,\mathrm{ctg}\,x$。 5. $y_2=e^{\frac{1}{2}ax^2}\int e^{-ax^2}dx$。
6. $y_2=\sin x+\frac{x}{\cos x}$。 7. $y_2=e^{-\frac{1}{2}x^2}\int e^{\frac{1}{2}x^2}dx$。 8. 对第7题微分$n$次得本方程,故 $y=\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(c_1+c_2\int e^{\frac{1}{2}x^2}dx\right)$。 9. (1) $(x^3+$

$+3x^2+x+4)y''+(x^3-5x+3)y'-(3x^2+6x+1)y=0$; (2) $x^2y''+(x+$ $+a)y'-y=0$; (3) $x^2y''-2x(x+1)y'+2(x+1)y=0$; (4) $x^2y''+\dfrac{y}{\ln x}=$ $=0$; (5) $x(x^2-2)y''-(x^3+3x^2-2x-2)y'+(x^2+4x+2)y=0$; (6) $y''-x^2y'+xy=0$; (7) $4x^2y''+4y^3y'+(2x^2-3)y=0$; (8) $(ax^2+$ $+bx)y''+2by'-2ay=0$; (9) $x^3y''+xy'-y=0$; (10) $16x^2y''+(4x+3)y=$ $=0$. 11. 将y_1,y_2代入方程并消去y_1，得 $q'+2pq+3\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}=0$ 即为充要条件. 12. 两个方程相减，即得公共解 $e^{-\int\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}dx}$. 这两个方程的通解依次为 $y=e^{-\int\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}dx}\left[A_1+B_1\int\left(2\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}-p_1\right)dx\right]$,

$y=e^{-\int\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}dx}\left[A_2+B_2\int\left(2\frac{q_1-q_2}{p_1+p_2}-p_2\right)dx\right]$, p_1, p_2, q_1, q_2 之间的关系式是$\left(\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}\right)'=\left(\frac{q_2-q_2}{p_1-p_2}\right)^2+\frac{p_1q_2-p_2q_1}{p_1-q_2}$.

15. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}$. 16. $y=c_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x}+c_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$.

17. $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$. 18. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$.

19. $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 20. $s=e^{-at}(c_1+c_2x)$.

21. 令$t=e^{-x}$ 方程化为$y''(t)+ay(t)=0$. 22. 不变式$I=1$，令 $y=e^{x^2}u$, 方程化为$u''+u=0$. 23. 令$y=ue^{\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}}$，方程化为 $u''-9u=0$. 24. 令$t=\sin x$，方程化为 $y''(t)+ay(t)=0$. 26. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+$ $+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$. 27. $y=c_1e^{at}+c_2e^{-at}-\frac{1}{a^2}(t+1)$. 28. $y=c_1+c_2e^{x}-\frac{x^2}{4}-$ $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x\cos2x+\frac{1}{20}x\sin2x+\frac{17}{360}\cos2x-\frac{4}{45}\sin2x$. 29. $y=c_1\cos2x+$ $+c_2\sin2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\sin2x$. 30. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+xe^{x}+\frac{1}{20}\cos x+\frac{3}{20}\sin x$.

31. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x+\frac{1}{40}\cos 2x+\frac{3}{10}\sin 2x$. 32. $y=x^2\left(\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{2\times 3}x+\frac{1}{3\times 4}x^2+\cdots+\frac{1}{26\times 27}x^{25}\right)e^{8x}=x^2e^{6x}\sum_{k=1}^{26}\frac{1}{k(k+1)}x^{k-1}$.

33. $x=t[c_1\cos(\ln t)+c_2\sin(\ln t)+\ln t]$. 34. $y=c_1\left[-\frac{3}{2}x^2+\right.$ $\left.+\frac{3}{4}\left(x^3-x\right)\ln\frac{1+x}{1-x}+1\right]+c_2(x^3-x)-\frac{1}{6}$. 35. 本题求满足条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$的解，为 $y=\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{2}{3}e^{-x}-xe^x$. 36 函数$y(t)$满足 $y''+3y'+2y=6xe^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 解出得 $y=-7e^{-2x}+8e^{-x}$ $+(3x^2-6x)e^{-x}$. 37. 化为二阶方程 $x_1''-x_1'-2x_1=-4e^t$, 得解$x_1=$ $=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+2e^t$, $x_2=\frac{1}{2}c_1e^{2t}+2c_2e^{-t}+2e^t$. 38. 化为二阶方程$x_1''+$ $+x_1'=\cos t+t^2$, 得解 $x_1=\cos t+t^2-2+\frac{1}{2}t\sin t$, $x_2=-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}t$ $\times\cos t+2t$. 39. 化为二阶方程 $y''+y=5\sin t$, 得解$x=\frac{1}{2}t(\sin t-3\cos t)$, $y=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{5}{2}t\cos t$. 41. (1) $\frac{n!}{s^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\,s>0$; (2) $\frac{n!}{(s-a)^2}$, $\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,a$; (3) $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\mathrm{Re}\,s>0$; (4) $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\mathrm{Re}\,s>0$; (5) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $\mathrm{Re}\,s>0$; (6) $\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{\lambda}}{s}$ $\mathrm{Re}\,s>0$. 42. (1) $\frac{1}{3}\left(\cos t-\right.$ $\left.-\cos 2t\right)$; (2) $\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$; (3) $e^{2t}-e^t$; (4) $1-e^{-t}-te^{-t}$; (5) $1-e^{-t}$; (6) $t\cos 2t$. 43. $y=-3e^{-2x}+4e^{-x}$. 44. $y=-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3x}+$ $+\frac{4}{5}e^{-2x}$. 45. $y=\frac{1}{8}\left(\sin x-\cos x\right)+\frac{1}{8}e^{-2x}(\sin x+\cos x)$. 46 $y=$ $=3+2x-\frac{1}{2}e^x-2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$. 47. $y=a_0\left(1+\right.$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 4^k}{3k(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3\cdot 2}x^{3k}\Big)+$

$+a_1\Big(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 4^k x^{3k+1}}{(3k+1)3k(3k-2)(3k-3)\cdots 4\cdot 3}\Big)$，$(|x|<\infty)$。

48. $y=a_0\cdot\Big\{x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\Big\}+a_1\Big\{1$

$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}\Big\}$ $|x|<\infty$。 49. $y=\frac{a_0}{(1-x^2)^2}$

$+\frac{a_1(3x-x^3)}{3(1-x^2)^2}$ $x\in(-1,1)$。 50. $y=a_0(1+4x^2)+$

$+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^{2k}x^{2k+1}}{4k^2-1}$ $|x|<2$。 51. $y=a_0\cos\sqrt{x}+a_1\sin\sqrt{x}$

$x\in(0,\infty)$。 52. $y=a_0\Big(1+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)(2n+3)}\Big)+a_1(x^{-\frac{3}{2}}+$

$+10x^{-\frac{1}{2}})$ $x\in\Big(0,\ \frac{1}{5}\Big)$。53. $y=a_0x^{\frac{1}{4}}+a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{2^n n!\,1\cdot 5\cdots(4n-3)}$

$x\in[0,\ \infty)$。 54. $y=a_0J_{\frac{3}{5}}(2x)+a_1J_{-\frac{3}{5}}(2x)$。 55. $y=\cos(-x+c_1)$

$+c_2$。 56. $y=c_1\Big(x+\frac{x^3}{3}\Big)+c_0$。 57. $y=\frac{-1}{c_1x+c_2}+x$, $y=c$。

58. $y=-\frac{x}{c_1}+\Big(1+\frac{1}{c_1^2}\Big)\ln|1+c_1x|+c_2$。 59. $1+c_1x^2=(\sqrt{c_1}t+c_2)^2$。

60. $y=\frac{1}{12}\Big(x+c_1\Big)^3+c_2$。 61. $2y+c_1\ln|x^2+c_1|=x^2+c_2$。 62. $\ln|y|$

$=c_1\Big[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big]+c_2$。 63. $\sqrt{c_1^2-y^2}$

$-c_1\ln\Big(\frac{c_1+\sqrt{c_1^2-y^2}}{y}\Big)=x+c_2$，或令 $p=\operatorname{tg}\varphi$ 得参数形式的解 $x=$